

# 高等数学基于案例研讨式的教学创新研究

## ——可降阶的微分方程课例设计

杨春雨, 闫盼盼, 毛俊超

潜艇学院, 山东 青岛

收稿日期: 2024年9月8日; 录用日期: 2024年11月9日; 发布日期: 2024年11月18日

### 摘要

高等数学作为理工科的基础课程之一, 为学员提升学习力、思维力、创新力、应用力以及终身发展提供了基础支撑作用。但是由于其课程抽象性强、逻辑性强等特点, 课堂多以讲授式为主, 学员容易产生畏难心理, 从而只拘泥于“算题”而非注重能力素质的养成。本文基于智慧教学模式下, 以案例式教学为主要教学手段, 给出了具体的教学课例设计, 切实提高了课堂教学质量, 并为高等数学课堂教学改革创新提供参考性示范。

### 关键词

高等数学, 智慧教学, 案例式, 具体课例

# Advanced Mathematics Teaching Innovation Lesson Based on Case Discussion

## —Lesson Design of Differential Equations with Reduced Order

Chunyu Yang, Panpan Yan, Junchao Mao

Submarine Academy, Qingdao Shandong

Received: Sep. 8<sup>th</sup>, 2024; accepted: Nov. 9<sup>th</sup>, 2024; published: Nov. 18<sup>th</sup>, 2024

### Abstract

As one of the basic courses of science and engineering disciplines, advanced mathematics provides basic support for students to enhance their learning ability, thinking ability, innovation ability, application ability and lifelong development. However, due to its abstract nature and strong logical components, the class is mainly lecture-oriented, and the students easily produce a psychological

fear of difficulties, so they only adhere to the “calculation problem” instead of fostering their overall competencies. In this paper, based on the wisdom teaching mode and the case-based teaching as the main teaching means, the specific teaching lesson design is given, which effectively improves the class teaching quality and provides a reference demonstration for the reform and innovation of higher mathematics classroom teaching.

## Keywords

Advanced Mathematics, Intelligent Teaching, Case-Based, Specific Teaching Lesson

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

落实新时代军事教育方针，为培养能适应未来高端海战的指挥人才，课程组坚持“立德树人、为战育人”，基于“知识基础、课程思政、思维培养、专业应用”内容创新设计进行“二维三阶四融合”的课堂教学创新设计，本文以《可降阶的高阶微分方程》为创新课例示范，利用“二维”，即线上线下载通军地平台的教学资源，进行学员预习、复习、练习；以课前思疑、课中学辩、课后练悟的“三阶”质疑式教学模式进行课堂教学；以知识基础、课程思政、思维培养、专业应用的“四融合”的内容设计，丰富内容。

## 2. 课情分析

### 2.1. 课次内容地位与教学目标

可降阶微分方程位于高等数学中位于第七章第4讲，是“微分方程”章节的一个非常重要的概念，本讲涉及到  $y^{(n)} = f(x)$ 、 $y'' = f(x, y')$ 、 $y'' = f(y, y')$  三类可降阶的微分方程，其解法以一阶微分方程为基础，用“变量替换”的数学方法进行求解，同时本微分方程在物理学、工程学、经济学等领域都有广泛的应用价值。

从夯实三基的角度，会求解  $y^{(n)} = f(x)$  类型、 $y'' = f(x, y')$  类型和  $y'' = f(y, y')$  类型的微分方程，能够建立实际问题的微分方程模型；从方法培养的角度，经历课前自学、课中研讨分析、课后归纳练习的过程，学会类比、变量替换、化归等方法，学会能够灵活运用微分方程解决实际问题的方法、技巧，初步体会数学建模的思想，提升类比思维、化归思维、抽象思维、逻辑思维等思维力。从素质养成的角度，通过微分方程问题的求解过程，体会方程思想的实际意义，通过方程求解的思路与方法，感受数学思维的巧妙与严谨，涵养科学精神，明确制胜关键。

### 2.2. 课次设计思路

本节课以课前思疑、课中学辩、课后练悟三阶质疑式教学模式进行，课堂贯彻以学员为中心的启发式教学原则，课前利用“二维”，推送自学、自测、提问与反馈等内容、课中以案例式问题牵引进行学习、研讨、辨析、练习与测试，课后进行练悟。教授过程中，聚焦“四性一度”，即铸魂性、为战性、高阶性、创新性以及挑战度，坚持以夯实三基为教学主线，环绕案例式、研讨式等多种教学手段，调动学员自主探索，提升学习力、思维力，引入军事案例，以知识基础为载体，提高学员的自主运用知识解决

实际问题的能力，以条件的更改联系实际情况，提升学员科技创新与应用能力，经历伯努利兄弟的故事进行课程思政，增强打仗制胜的关键在于创新的思想。

在课程思政方面，基于数学家的故事，以人育人，此为显性思政，即以悬链线问题引发的伯努利兄弟之争的故事中雅各布伯努利，打破思维定式、敢于挑战权威、创新的精神，这些精神对于在未来复杂多变的战场是制胜关键。在课堂上讨论、练习、思辨的过程，处处体现辩证法，这是隐性思政，涵养科学精神。在思维培养方面，根据对教学内容的分析，本课程涉及三类方程的计算，其核心的思维能力有类比、转化、迁移的思维能力，求解所运用的数学思维方法为变量替换；本节课涉及到两个案例，其中有鱼雷追击问题的军事案例，案例的研讨分析过程提高创新思维能力以及应用能力，而对于案例的改编解读结果等则养成建模意识、提高高阶思维能力。在专业应用方面，以鱼雷追击问题为切入点，此方程建立后是  $y'' = f(x, y')$  型方程。鱼雷追击问题中涉及的问题分析、数学问题归结、模型假设、模型建立、求解方程、结果分析，由小组讨论进行；将确定问题改为开放问题，进行研讨，训练思维。

### 3. 学情分析

学情分析从客观知识基础、能力基础出发，利用学员课前在线自学的数据为基础，确定本次课的教学起点，动态地调整教学方案[1]。

知识基础：已经有一阶微分方程的计算基础，同时有一元微积分的基础知识；同时已经通过自学，已经掌握了  $y^{(n)} = f(x)$  型的微分方程。

能力基础：具有转化的基本能力、具有知识迁移能力。

不足：降阶的理解把控不到位，用微分方程处理实际问题存在障碍。

## 4. 课堂实施过程

### 4.1. 重难点分析

根据教学目标，教学的重点为可降阶的微分方程的求解，根据学情分析，课程的难点是将二阶微分方程降阶成一阶微分方程的理解，区分并计算  $y'' = f(x, y')$ 、 $y'' = f(y, y')$  微分方程上存在困难，对于实际应用构建微分方程有困难。

解决重难点策略：利用系统发布 AI 预习讲解与学习资料，结合雨课堂布置的四道预习检测题，找到教学起点；以质点轨迹问题、鱼雷追击问题作为案例，提高数学应用能力、体会建模思想；课堂通过问题引导、不断提出问题—解决问题，启发学员思考提高思维力；课堂检测，进行知识的检测，并有针对性地解决问题。

由此分析，本节课的理论性偏弱、三种可降阶的方程可以通过自学完成部分的学习。方程的应用性强、因此可用智慧课堂进行授课，在课前推送相关预习任务，布置预习检测题目，课堂进行案例式教学，采用探究式、研讨式、练习式等教学方法，采用板书、雨课堂相结合的教学手段进行教授[2]。

### 4.2. 课例提纲设计

以下从教学环节、教学内容、师生互动以及教学意图给出课堂教学实施。

<p>预习任务</p>	<p>根据视频提问与提示，在大学数学教学辅助系统观看微课视频、高等数学预习系统进行预习问题查找与解决。预习检测题目如下：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li><math>y^{(n)} = f(x)</math> 求解</li> <li>方程类型的判断</li> <li><math>y'' = f(x, y')</math> 方程求解</li> <li><math>y'' = f(y, y')</math> 方程求解</li> </ol>	<p>预习问题：1. 什么是可降阶的微分方程？他们从类型上有什么区别？</p> <p>2. 如何对方程进行计算？为什么要降阶处理？</p>
-------------	--	---

续表

教学环节	教学内容(讲稿)	师生互动	教学意图(四融合)
预习情况说明环节	预习情况对比教学目标说明	讲授教学目标达成度、难点、根据预习明确学习目标	确定教学起点
	<p>案例 1 轨迹问题</p> <p>质点受变力由静止开始做直线运动, 并且随着时间的增加, 力均匀下降, 直到力为 0, 求运动规律。</p> <p>问题 1. 将其翻译成数学语言;</p> <p>问题 2. 如何建立微分方程?</p> <p>将其翻译成数学语言:</p> <p>总结: 通过预习能够自我完成, 不再详解。</p>	<p>1. 教员组织学员小组对案例 1 进行 1 到 2 分钟讨论发言、并对案例 1 涉及到的核心点进行讲解;</p> <p>2. 学员根据问题进行讨论, 并思考数学语言的对应关系;</p> <p>3. 教员提示此类型可降阶的 C 参与运算</p> <p>学法指导: 观察法、归纳总结、演绎</p>	<p>能力培养: 数学语言表达能力, 数学语言描述客观世界的能力, 提高学习力、探究精神</p> <p>数学思想方法: 掌握基本的处理问题方法——发现问题、提出问题、分析问题;</p> <p>思维培养: 转化思维</p>
案例探究环节	<p>案例 2. 追击问题</p> <p>我舰向东正 1 海里处的敌舰发射制导鱼雷, 鱼雷在航行中始终对准敌舰。设敌舰以常速沿正北方向直线行驶, 已知鱼雷速度是敌舰速度的 5 倍, 求鱼雷的航行曲线方程, 并问敌舰航行多远时, 将被鱼雷击中。</p> <p>问题 1. 将其翻译成数学语言;</p> <p>问题 2. 如何建立微分方程?</p> <p>问题 3. 此时微分方程有什么特点?</p> <p>问题 4. 归结解法。</p> <p>互动提问: 上述方程是哪一种类型的呢? 如何求解?</p>	<p>1. 教员带领学员读题, 点明本题应建立坐标系, 但坐标系建立由三维到二维的关键之处在于海平面可以近似看作平面, 然后组织小组讨论;</p> <p>2. 学员小组讨论, 并发言, 找出微分之间的对应关系;</p> <p>3. 教员通过学员的回答, 点明三个变量如何计算变成两个变量</p> <p>学法指导: 观察、数形结合、演绎</p>	<p>能力培养: 数学语言表达能力, 数学语言描述客观世界的能力, 提高学习力、探究精神</p> <p>数学思想方法: 掌握基本的处理问题方法——发现问题、提出问题、分析问题, 数形结合</p> <p>思维培养: 转化思维、抽象思维、逻辑思维</p> <p>专业融合: 军事应用鱼雷追击问题</p>
不显含 y 型	$y'' = f(x, y')$ <p>令 <math>y' = p, y'' = p'</math>, 则方程变为:</p> $\frac{dp}{dx} = f(x, p),$ ——一阶微分方程解法。 最后不要忘记再求一次积分。 例 1. 预习检测 3	<p>1. 教员推导, 点明如何实现降阶, 同时以预习检测 3 的题目作为例题 1 进行讲解与示范;</p> <p>2. 学员思考预习中出错的点, 并进行求解过程的思考</p> <p>学法指导: 对比法、分析法</p>	<p>数学思想方法: 变量替换(变量代换)</p> <p>思维培养: 逻辑思维</p> <p>课程思政: 隐性思政, 在推导和例题示范中体会规范性的科学精神</p>
拓展思政	<p>悬链线问题: 来源于达·芬奇戴珍珠项链的少女, 项链的形状是什么曲线问题。</p> $\begin{cases} y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1+y'^2} \\ y(0) = a, y'(0) = 0 \end{cases}$ <p>对方程类型进行判定, 并简单说明求解步骤。悬链线是雅各布伯努利提出, 当时包括牛顿等著名的科学家普遍认为是抛物线, 但是很长时间都没人求出确定的方程, 直到雅各布的弟弟约翰伯努利勇于挑战权威, 跳出思维定式, 创造性地解决了问题。这种创新精神正是未来复杂多变的战场上制胜关键。</p>	<p>1. 教员简述悬链线问题历史进行课程思政;</p> <p>2. 学员体会创新思维的重要性</p>	<p>课程思政: 打破思维定式、创新思维, 是未来战场的指挥官需要的核心素质</p>

续表

<p>案例 2 军事应用</p>	<p>案例 2 的计算 拓展思考 根据实际数据,使用数学软件 Matlab 绘制不同速度的追击图,体会理想与实际之间的矛盾,引发进一步的思考[3]。</p>	<p>1. 学员就案例 2 的求解过程,再次回顾方程类型计算过程; 2. 教员显示拓展问题的 matlab 计算结果,学员进行结果的解读与评价; 3. 对于探究 2 进行实际情况的探讨,并布置小组合作的军事案例报告问题 学法指导:观察法、分析法、对比法、理论联系实际</p>	<p>能力培养:提高学习能力、探究能力 数学思想方法:掌握基本的处理问题方法——发现问题、提出问题、分析问题,思维培养:转化思维、发散思维 专业融合:军事应用鱼雷追击问题</p>
<p>不显含 x 型</p>	<p><math>y'' = f(y, y')</math>, 令 <math>y' = p, y'' = p'</math>, 则 <math>p \frac{dp}{dy} = f(x, p)</math>, ——一阶微分方程解法。 例 2. 预习检测 4 例 3. 一个离地面很高的物体,受地球引力的作用,由静止开始落向地面,求它落到地面时的速度和时间?</p>	<p>1. 根据预习检测,可知这类微分方程掌握并不好,因此直接讲授,教员在讲解的过程中,注意转化自变量的问题,并将预习检测 4 作为例 2 进行计算与示范,例 3 只列方程,不求解,留到课下进行; 2. 学员根据预习情况,找取计算中的关键点 学法指导:对比法、分析法</p>	<p>能力培养:应用能力 数学思想方法:变量替换(变量代换) 思维培养:逻辑思维 课程思政:隐性思政,在推导和例题示范中体会规范性的科学精神</p>
<p>小结</p>	<p>以对比的形式总结隐 x 与隐 y 两种类型的微分方程,凸显数学思想方法,对本节课进行升华 提问:区别在哪里?</p>	<p>1. 教员带领学员总结计算步骤流程图; 2. 学员深入体会计算,然后对方程深层次地区分 学法指导:归纳总结、类比、化归</p>	<p>数学方法思想:变量替换、归纳总结</p>
<p>课堂检测</p>	<p>(课堂检测)下列计算过程正确的是( ) A. <math>y'' + yx = y'</math> 是可降阶微分方程,用 <math>p = y'</math> 化为 <math>p' + x = p</math>; B. <math>y' + y'' = 1</math> 即可以用不显含 x 又可以用不显含 y 的方法计算; C. <math>xy'' + y' = 0</math>, 令 <math>p = y', xp' + p = 0, p = C/x</math>, 之后再积分即可; D. <math>yy'' + 2y' = 0</math>, 令 <math>p = y', p' = y''</math>, 则 <math>yp' + 2p = 0</math> 再计算</p>	<p>教员根据学员的正确率,再次对方程进行核心讲解</p>	<p>后测</p>

### 5. 教学后记与进一步思考

高等数学以可降阶的微分方程为课例,给课堂设计提供了改革新思路、新方法。本次适合智慧化教学的实施,教学内容相对简单,容易自学理解,因此课上可以有部分时间进行军事应用案例的研讨,集中提升学员的思维力、学习力、应用能力。在对军事应用案例的开放式问题解读的过程中,对结果进行可视化编程,让学员思考解读结果,发散学员的思维,拓宽学员的视野,效果好,切实地提升了授课质量[2]。

本节课依托于雨课堂软件进行智慧教学,在教学实施中,也存在一些不足。一是不能保证学员依托

平台进行线上自学的时、质量。二是课上难以保持智慧形式的教学。智慧教学依靠学员课下将知识进行充分的自学，将低阶的教学目标自己完成，课上根据学员测试情况，动态地对学员自己解决不了的问题以及高层次的问题进行讲解与探讨。但是高等数学自身的高抽象性、高逻辑性，不能理想化地仅依托学员自学，教员课上讲解高阶知识。因此课上并不能完全实现智慧教学模式，依然会采用讲授式，辅助以探究式、研讨式、案例式等多种教学方法并存的授课形式，智慧化的教学手段也大部分体现在测试阶段，因此在这一点上，依然需要进行思考与创新。

大学数学类课程的智慧教学实践还需要持续深入的思考与开发，既不能偏激地认为智慧教学不适用于数学类课程改革创新，也不能偏激地将数学类课程全部进行智慧化的教学。因为智慧教学其本身就是复杂的统一体，其涉及到教、学、管三方。对教员而言需要大胆构想、打破思维定式，重新构建教学思路，对于学员而言需要高度的自觉性、自律性以及积极的学习态度，对于教学管理方面，要加大力度支持教学创新。

### 参考文献

- [1] 郭炯, 丁添. 智慧课堂环境下指向数学学科能力的学情分析研究: 理论框架与实践进路[J]. 中国电化教育, 2024(2): 100-107.
- [2] 冀德刚. 基于新视角探析高等数学教学的创新发展——评《高等数学教学理念与方法创新研究》[J]. 中国油脂, 2023, 48(8): I0046.
- [3] 赵建昕. 大学数学应用案例分析[M]. 青岛: 中国海洋大学出版社, 2023.