

“三教”理念下培养中学生逻辑推理素养研究

张欣瑞, 翟晓雨, 姜荣游, 杨静宇

赤峰学院数学与计算机科学学院, 内蒙古 赤峰

收稿日期: 2025年1月22日; 录用日期: 2025年3月13日; 发布日期: 2025年3月21日

摘 要

“三教”教育理念的提出, 旨在培育学生的思辨能力, 并在“想数学”、“做数学”、“说数学”中积淀学生个性化经验, 促进学生数学核心素养的形成。文章将基于“三教”理念, 借助解题研究来探讨学生逻辑推理能力的发展, 同时有针对性地提出数学教学中培育学生逻辑推理核心素养的有效策略, 旨在为数学教师培养学生的逻辑推理能力提供参考。

关键词

“三教”理念, 逻辑推理素养, 数学教学

Research on Cultivating the Logical Reasoning Competence of Middle School Students under the Concept of “Three Teachings”

Xinrui Zhang, Xiaoyu Zhai, Rongyou Jiang, Jingyu Yang

School of Mathematics and Computer Science, Chifeng University, Chifeng Inner Mongolia

Received: Jan. 22nd, 2025; accepted: Mar. 13th, 2025; published: Mar. 21st, 2025

Abstract

The proposal of the educational concept of “Three Teachings” aims to cultivate students’ critical thinking abilities, accumulate students’ personalized experiences in “thinking about mathematics”, “doing mathematics”, and “talking about mathematics”, and promote the formation of students’ core mathematical competencies. Based on the concept of “Three Teachings”, this paper will explore the development of students’ logical reasoning abilities through problem-solving research. Meanwhile, it will put forward targeted and effective strategies for cultivating students’ core competencies in logical reasoning in mathematics teaching, aiming to provide references for mathematics teachers

in cultivating students' logical reasoning abilities.

Keywords

The Concept of "Three Teachings", Logical Reasoning Proficiency, Mathematics Teaching

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

新一轮课程改革正以“立德树人”为宗旨，以发展学生“核心素养”为目标，以实现课堂教学转型为重点的“再出发”阶段[1]。2014年，吕传汉教授及其团队结合超过十年的研究经验，提出了“教思考、教体验、教表达”的理念，简称“三教”理念。这一理念是他们在长期的理论研究与实践探索基础上针对当时我国的课程教学现状提出的。此举不仅对学科教育进行了全面而高度概括，同时也为我国的基础教育和教育教学提供了宝贵的经验。值得一提的是，这一理念的提出与我国2022年版《义务教育数学课程标准》中的三大核心素养有着显著的相似之处。教育部发布的《普通高中数学课程标准2017版》中也强调了逻辑推理的核心地位。逻辑推理素养作为数学学科核心素养之一，不仅是学生学习数学知识的基础能力[2]，还是他们未来发展必备的个人素质之一。

数学知识之间存在的逻辑联系体现在上位和下位的数学概念之间，例如子集与真子集、空集的关系上，那么如何使学生在学习完上位概念后了解掌握下位数学概念，这就十分考验学生的逻辑推理能力。另外，学生日常接受的都是老师“填鸭式”教学，老师教学生听的教学模式还比比皆是，学生一般进行的都是机械化的做题，很少能够主动进行探究、逻辑推理活动，这就造成学生只会对数学体系中的某一个问题的某一模块的内容掌握，造成数学知识的割裂，未建立起完整的数学知识体系，不能灵活运用数学知识，那么如何通过合理运用“三教”理念于实际课堂而达到发展中学生逻辑推理素养，这是目前亟待深入探讨的问题。

2. 理论概述

2.1. “三教”理念

2.1.1. 基本定义

“教思考”，指的是让学生“数学地思考”。所谓“数学地思考”，就是从数学的角度思考问题。教师在数学教学中，要引导学生感受数学与生活世界的关联，进而提升学生的数学思维，激励学生去思考问题，以期学生能够得到内在的认知；“教体验”，指的是通过思考将浮于表层的问题转化成深化的、内部的数学问题，体验数学问题的发生发展过程；以数学学科基础知识、技能为起点，经过学生个体的思考、领悟思想方法，当学生的这种个性化的经验积累到一定程度后，就会形成自己独特的数学学习策略，迅速理解数学知识，体会数学学习过程，最终达到发展数学核心素养的目的[3]；所谓“教表达”，首先，表达包括书面表达和口头表达，而无论学生对数学问题有何种见解，最终都要通过数学语言表达出来，数学学科具有严谨性，所以数学语言中自然语言、图形语言和符号语言的转化至关重要，表达与交流是学生数学学习中的重要一环，通过独立思考、互相交流、批判质疑，促进学生吸纳知识以及数学核心素养的达成。

2.1.2. 建构主义学习理论

建构主义作为一种重要的学习理论，其核心理念在于强调学习者基于自身的经验、认知结构及信念体系，主动构建对知识的理解与意义，从而深化对世界的认知[4]。该理论的思想渊源可追溯至瑞士著名发展心理学家皮亚杰的认知发展理论，并在此基础上衍生出两大主要流派：以皮亚杰理论为基础的认知建构主义，以及以维果斯基理论为核心的社会建构主义。建构主义主张人类并非被动地接受外部信息，而是通过与环境的互动、自身的反思以及社会交往，主动建构对世界的理解与知识体系。在这一过程中，学生被视为知识的主动建构者，而非知识的被动接受者，其对知识的掌握需经历观察、思考与实践的完整过程。建构主义学习理论强调以学生为中心，注重学习者的个体经验与情境体验。学习者基于已有的知识基础，通过参与真实情境中的活动以及在学习共同体的协作，逐步建构对知识的理解，并在解决实际问题的过程中获得新的知识与经验。维果斯基的社会建构主义理论进一步指出，知识的建构依赖于语言、社会规则及文化约定，其中语言作为社会建构的核心媒介，在知识的传递与转化中发挥着关键作用。维果斯基提出的“语言工具论”认为，语言不仅是表达思想的工具，更是社会交往与知识共享的桥梁。在数学教育领域，学生的表达能力尤为重要，因为数学语言(如符号、公式、图形)是数学知识建构与交流的重要载体。社会建构主义理论中个人的主观知识转化为使他人有可能接受的客观知识，这一转化需要人际交往的社会过程，其中语言是发表知识的主要媒介，而在数学领域学生如何进行表达成为重要因素。综上所述，建构主义学习理论通过强调学生的主动性、情境的真实性以及社会交往的重要性与“三教”理念不谋而合。

2.2. 逻辑推理素养

《普通高中课程标准(2017 年版)》中逻辑推理是六大数学核心素养之一。其中逻辑推理素养的含义是：从一些事实和命题出发，依据逻辑推理规则推出其他命题[5]。逻辑推理主要包括两类：一类是从特殊到一般的推理，推理形式主要有归纳、类比；另一类是从一般到特殊的推理，推理形式主要有演绎[6]。逻辑推理素养与推理论证相似但有一定的区别，推理论证强调学生要获得知识和技能；逻辑推理素养在要求学生具备相应的知识和技能的基础上，更注重学生对已有事实进行分析、推理和归纳总结的方法，最终使学生养成逻辑思维素质。

3. “三教”理念下逻辑推理素养的培育

在“三教”理念下培育逻辑推理素养需要分步骤，从直观观察到数学证明，再到拓展应用，逐步深入。还要考虑学生的认知过程，例如如何从具体例子中抽象出一般规律，下面将运用逻辑推理的四步骤，观察、猜想、验证、归纳，并结合以下问题的解题过程，探讨如何通过问题的分析解决培养学生的逻辑推理素养。

3.1. 在“教思考”中培育逻辑推理素养

1. 问题呈现

若 A, B 两点分别在圆 $x^2 + y^2 - 6x + 16y - 48 = 0$ 和 $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 44 = 0$ 运动，则 A, B 两点距离的最大值多少？

2. 解法探究

逻辑推理四步骤中的第一步观察，根据题干可知本题的已知条件是两个圆的一般方程 $x^2 + y^2 - 6x + 16y - 48 = 0$ 和 $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 44 = 0$ ，其中还给出 A, B 两点分别在两个圆上运动，本题的问题是求在两个圆上运动的 A, B 两点距离的最大值。此过程至关重要，只有不漏信息才可以开展

后续的猜想工作。

逻辑推理四步骤中的第二步猜想, 根据本题的问题 A, B 两点距离的最大值首先进行猜想能否通过求出 A, B 两点坐标运用两点之间距离公式进行解决, 从观察到的已知条件我们能够判断出两圆的一般方程是关键信息, 根据刚刚的猜想 A, B 两点坐标并不能从两个二元二次方程中求得, 所以此问题不能用两点之间距离公式进行直接解决。我们接下来可以将目光转向关键信息上, 已知两方程的图象是圆, 能否将两圆的图象在坐标图上展示, 然而从圆的一般式方程并不容易读出半径和圆心坐标, 进而联想到由圆的一般式方程转化成圆的标准式方程, 由此直接得出两圆的半径和圆心坐标, 通过画图象直观感受两圆的位置关系, 若两圆相切、相交或相离, A, B 两点距离的最大值为圆心距离与半径之和, 若两圆内含或同心, A, B 两点距离的最大值为圆心距离与半径之差。

逻辑推理四步骤中的第三步验证, 首先将圆的一般方程 $x^2 + y^2 - 6x + 16y - 48 = 0$ 进行配方, 可以得到圆的标准方程 $(x-3)^2 + (y+8)^2 = 121$, 根据方程可知此圆的圆心为 $(3, -8)$, 半径为 11, 所以 A 点在以 $(3, -8)$ 为圆心, 11 为半径的圆上运动; 接下来利用类比将圆的一般方程 $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 44 = 0$ 进行配方, 得到圆的标准方程 $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 64$, 根据方程可知此圆的圆心为 $(-2, 4)$, 半径为 8, 所以 B 点在以 $(-2, 4)$ 为圆心, 8 为半径的圆上运动; 两圆相交, 则 A、B 两点距离的最大值为圆心距离与半径之和, 根据两点距离公式可知两圆心的距离为 $d = \sqrt{[3 - (-2)]^2 + (-8 - 4)^2} = 13$, 也可以通过 $11 + 8 = 19 > 13 > 11 - 8 = 3$ 可知两圆相交, 故解得 A, B 两点距离的最大值为 $13 + 11 + 8 = 32$ 。

逻辑推理四步骤中的第四步归纳, 首先在此题的解析上经历了从具体到抽象的过程, 从具体的方程形式出发, 抽象出几何性质, 如圆心距离与半径的关系。经历了从直观到严谨, 先尝试直观方法, 如直接求解坐标, 再结合几何图象进行严谨分析。而且在问题的解决上基于已知条件提出假设, 并评估其可行性; 通过几何直观与数学工具的结合, 逐步优化解决方向; 从具体问题中提炼一般规律, 为后续的证明与应用奠定基础。这种逻辑推理过程不仅适用于本题, 也为解决其他数学问题提供了方法论指导, 体现了“教思考”中“思维训练”的本质。“教思考”本质是让学生找到解题的方法, 本题看似让学生求两点的最大距离, 但是由于引入圆的概念, 则要思考圆的方程的几种形式的转化, 并且利用圆的方程与半径求得两圆心的距离, 结合题目求出在两圆上的 A, B 点距离最大值。由此可见, 面对不同题型, 都有一套适用的解题方案, 结合具体问题寻找适合知识点, 再在知识同点的配合下得到问题的解决。在思考的过程中讲求逻辑的由浅入深、由表及里, 从猜想中可以看出大部分学生会直接从表象问题入手先思考两点距离的问题, 发现此方法行不通后再去思考已知条件与问题的联系, 其中也较为符合学生的认知发展规律, 思考时要结合题目逻辑进行全面思考也有助于学生解题。此过程注重各个数学知识点之间的内在联系与逻辑体系, 能够灵活提取对应知识点是学生逻辑思维活跃的体现。促进学生深层理解、探究能力的提升。这与当下推出的大单元教学有相似之处, 都希望学生能够对数学体系里的知识融会贯通、灵活运用。

3.2. 在“教体验”中培育逻辑推理素养

1. 问题呈现

数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 5a_n + \sqrt{24a_n^2 + 1}$, 证明数列 $\{a_n\}$ 的每一项都是正整数。

2. 解法探究

逻辑推理四步骤中的第一步观察, 根据题干可知本题的已知条件为数列首项 $a_1 = 1$; 而后又给出了 a_{n+1} 与 a_n 的关系式方程 $a_{n+1} = 5a_n + \sqrt{24a_n^2 + 1}$; 问题为如何证明数列 $\{a_n\}$ 中任意一项为正整数。

逻辑推理四步骤中的第二步猜想, 根据本题的条件 $24a_n^2 + 1 > 0$ 为从题中直接得到的数列 $\{a_n\}$ 单调递

增和 $\{a_n\}$ 的递推公式,这里常见的误区是会忽视初始条件。又已知首项 $a_1=1$ 可以根据题目中已经给出的关系式,可以直接算出 $a_2=10$ 也是正整数,在证明数列 $\{a_n\}$ 的每一项都是正整数的问题上,大多数学生会从数学归纳法入手,首先假设 a_k 满足数列中任意一项都是正整数,进而求得 a_{k+1} 也满足该条件,那么此题得证。将 a_k 带入关系式中,得 $a_{k+1}=5a_k+\sqrt{24a_k^2+1}$,将 a_{k+1} 带入关系式中,得 $a_{k+2}=5a_{k+1}+\sqrt{24a_{k+1}^2+1}$,考虑到此方法在计算时涉及的步骤较为繁琐,遂开始寻找其他解题方法;仔细观察题目中已知的方程式可否进行转化成一个形式较为简单的关系式,可以尝试对题目中给出的关系式 $a_{n+1}=5a_n+\sqrt{24a_n^2+1}$ 进行开根号、降幂等操作,寻找证明数列 $\{a_n\}$ 中任意一项都为正整数的方法。

逻辑推理四步骤中的第三步验证,首先从 $24a_n^2+1>0$ 已知数列 $\{a_n\}$ 严格递增,且 $a_1=1$,所以数列 $\{a_n\}$ 中的每一项都为正数,将原递推式左右两边进行移项再平方化为 $(a_{n+1}-5a_n)^2=24a_n^2+1$,开平方化简得 $a_{n+1}^2-10a_na_{n+1}+a_n^2-1=0\cdots\cdots①$,将方程①降幂得 $a_n^2-10a_na_{n-1}+a_{n-1}^2-1=0\cdots\cdots②$,根据方程①,②可知, $x^2-10a_nx+a_n^2-1=0\cdots\cdots③$,从而可知 a_{n-1} 和 a_{n+1} 都是此方程的根。此时结合方程③由韦达定理 $a_{n-1}+a_{n+1}=-\frac{b}{a}$,可得: $a_{n+1}=10a_n-a_{n-1}$ 。由 $a_1=1, a_2=10, a_3=101$ 都为整数,以此类推可得数列 $\{a_n\}$ 的每一项都是正整数,此题得证。

逻辑推理四步骤中的第四步归纳,结合《普通高中数学课标标准》中逻辑推理素养中水平三的要求,通过此题题干情况,教师引导学生用数学的眼光找到合适的数学研究对象,判断要求解的数学问题,即未知数为数列 $\{a_n\}$ 的通项公式以及数列中任意一项为正整数;条件为从题中直接得到的数列 $\{a_n\}$ 单调递增和 $\{a_n\}$ 的递推公式。首先提出问题解决的假设前提,从多方面考虑解决方案的可行性,最终选取合适的解决方案进行实施。对于复杂的已知条件,即 a_{n+1} 与 a_n 的关系式 $a_{n+1}=5a_n+\sqrt{24a_n^2+1}$;建构过渡性命题 $x^2-10a_nx+a_n^2-1=0$,再结合韦达定理,探索新的解题路径,最终问题得到完美解决。“教体验”着重学生“做数学”的过程,在此过程中学生通过问题解决的探索体会逻辑推理的发生,结合知识之间的传递性获得数学知识的体验,并逐步探索数学问题解决的行径。在学生体验知识的运用与问题的解决时要注意结构清晰、步骤明确,将猜想的步骤借助相关知识进行逐一操作,如若行不通再寻找他法。使学生通过合理的推理解决实际数学问题,获得成就感。这是一个闭环关系,随着学生的逻辑推理能力的逐渐提升,学生对于数学结论的获得和理解会更迅速更透彻,而逐渐通过对数学知识的掌握和数学结论的理解也会使学生的逻辑推理素养得到更大的发展,感知数学知识的变化与联系,在不断深入的探索过程中培养了学生的意志品质。

3.3. 在“教表达”中培育逻辑推理素养

1. 问题呈现

求函数 $y=\frac{\sin x}{\cos x-2}$ 的值域。

2. 解法探究

逻辑推理四步骤中的第一步观察,从本题题干可知此题的已知条件为 y 与 x 的函数关系式,未知条件为函数关系式的值域。

逻辑推理四步骤中的第二步猜想,条件为含有 y 与 x 的等式。本题要求的是此方程的值域,也就是 y 的取值范围;直接看通过此题所给的条件并不能直接找到解题办法,但经过思考发现,此关系式与两点确定斜率公式 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 相似,所以可以适时将原式分解为两点坐标确定斜率的形式,进而通过求此

斜率的取值范围来求得函数 $y=\frac{\sin x}{\cos x-2}$ 的值域。

逻辑推理四步骤中的第三步验证,将原方程变化为斜率公式 $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 的形式,为 $y = \frac{\sin x - 0}{\cos x - 2}$,那么此时原函数的值域等价于求单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的点 $P(\cos x, \sin x)$ 与定点 $Q(2, 0)$ 所确定的直线的斜率的范围,当过 Q 点的直线与单位圆相切时的斜率便是函数 $y = \frac{\sin x}{\cos x - 2}$ 的最值,设切线方程为 $y - 0 = k(x - 2)$,利用点到直线距离公式 $d = \frac{|-2k|}{\sqrt{k^2 + 1}}$,求得过 Q 的两切线的斜率 k 为 $\frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}$,可知此函数的值域是 $\left[\frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right]$ 。

逻辑推理四步骤中的第四步归纳,通过该题解法探究部分中的所给条件,教师可以引导学生有条理的表达已知条件与未知条件,但是通过已知条件的关系不能得到问题答案,遂引导学生思考是否可以用其他形式的数学语言进行表达,进而学生经历从求此方程的值域到求此斜率的取值范围,这就是一种数学语言的转化,并且此题还借助图形语言进行解题,实现了数学语言、符号语言和图形语言的多重应用。将原式分解为两点坐标确定斜率的形式过程中,学生之间可以进行互相交流,共同探索解题步骤、方法,形成个性化的见解,最终通过数学语言进行表达出来。在此过程中学生的逻辑推理能力在各类语言的转化中得到提升。

4. 中学数学逻辑推理素养培育的有效策略

4.1. 化繁为简,聚焦核心

在培养中学生逻辑推理素养的过程中,化归思想起着不可忽视的作用,无论是为了夯实数学基础,还是提升数学思维能力与数学应用能力。化归指将亟待解决的复杂问题通过某种转化手段将其转化为相对简单的问题,而逻辑推理指从已有的命题出发,通过数学规则推理出其他命题的素养,化归要求学生将分散的知识点(如函数、方程、几何图形)整合为有机体系。在此过程中,需要学生熟知数学知识点之间的关系,在进行转化时,学生能够分辨不同问题所需要的解决方案,合理分辨什么问题需要用哪一部分的学习内容去解决。在化归思想的指导下,学生可以拥有前后知识的连贯性的意识,串联起不同板块的知识将其用于数学解题过程中。有助于将数学知识内部关系紧密相连,从而更加全方位的掌握数学知识间的逻辑联系。运用化归思想,学生能够将复杂问题简单化,能够化未知为已知,实现问题的举一反三,从而增强学生灵活处理信息的能力,使学生积极主动的投入到数学学习当中。当面对无从下手的题目时,首先应该想到能否用其他表示形式来解决。数学符号语言也对应着不同语义,例如通过直角坐标系中点与线的位置关系对应函数值进行映射,再通过数形结合,将复杂问题简单化,我们还可以将代数问题转化为向量问题、图象问题等等来进行解决。这些转化与化归的过程正是帮助学生掌握推理形式与规则、探索论证与解题方法,发展逻辑推理素养的过程。相较于传统教学中对化归思想的零散应用,系统性提出“问题转化-工具匹配-逻辑验证”三阶模型,并通过案例实证其在提升学生逻辑严谨性、策略选择能力方面的有效性。

4.2. 架构知识,夯实基础

数学知识所构成的命题或概念是逻辑推理的主要工具,而在数学知识的学习中学生的逻辑推理素养在持续发挥作用,人教版高中数学课程函数部分中函数、一次函数、二次函数、反比例函数的教学过程中,由于函数内容较少,把它和一次函数的图象、性质、应用一同教授外,其他特殊函数——二次函数、反比例函数,都是类比一次函数的方法按照顺序进行教学,学生遵循从易到难、层层递进的逻辑关系进

行学习,有助于发展逻辑推理素养。而在概率统计中,通过“分布-期望-方差”的知识链,学生能逐步掌握从数据描述到统计推断的推理逻辑。几何与代数部分也是高中数学课程中的重要内容,在讲解空间向量与立体几何的课程中,通过几何直观和向量运算的逻辑关系,让学生通过代数方法解决图形问题,运用几何直观简化代数问题难度,在此过程中培养学生的逻辑推理素养。遵循“特殊到一般”的认知规律实行纵向递进。打破模块壁垒,构建跨领域知识网络实行横向联结。

4.3. 问题引领, 激发思维

数学问题是课堂进行的引导者,逻辑推理能力要在推理过程中体现,因此适时的问题情境给学生思考推理提供沃土,例如在概率与统计内容教学过程中,很多时候教师要为学生搭建一个合理的问题生活情境,能让学生在问题情境或具体任务中进行推理。另外,老师可结合学生的认知情况和最近发展区,创设一些具有“形异质近”特性或“形近质异”特性的问题。通过“形异质近”的问题培养学生在不同的情境下,用类比归纳的思想发现相同或相似概念或规则的能力,从中发现问题的本质;通过“形近质异”的问题发散学生思维,在熟悉的表达形式中依据所学内容找到论证思路,分辨问题间的逻辑关系,推断问题得到结论。学生对于数学问题的推理遵循循序渐进的原则,可能需要多个过渡性命题进行推理,所以设置层次性数学问题帮助发展学生的逻辑推理素养很有必要。

5. 结语

总体而言,基于“三教”理念,并以具体的数学内容为载体,通过“教思考、教体验、教表达”的数学教学过程,可以提高学生的逻辑推理能力。在平时课堂教学中,教师要善于结合“三教”理念借助各单元知识点,为学生创设提供推理机会的数学情境,灵活应用数学思想方法,引领学生从逻辑分析、推理判断中养成逻辑推理素养。

基金项目

基金项目: 内蒙古自治区十四五规划课题(2023NGHXX065); 赤峰学院研究生科研创新项目(Cfxyyjskycx2024006)。

参考文献

- [1] 费红亮, 曾善鹏. 一道动点类竞赛不等式的加强与推广[J]. 数学通报, 2019, 58(12): 2.
- [2] 余金通. 高中数学核心素养的分解与渗透探讨[J]. 当代教研论丛, 2020(2): 2.
- [3] 严虹, 游泰杰, 吕传汉. 对数学教学中“教思考教体验教表达”的认识与思考[J]. 数学教育学报, 2017, 26(5): 26-30.
- [4] 杨莹, 王维琼, 杨丽娟. 基于建构主义学习理论的《高等数学》课程教学设计与实践——以“对弧长的曲线积分”为例[J]. 高等数学研究, 2025, 28(1): 102-104+119.
- [5] 唐和平. 数学核心素养的主题教学实践与反思——以“点到直线的距离”为例[J]. 数学学习与研究, 2021(20): 2.
- [6] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2018.