

# 通过问题引领，引导数学探究

## ——以“椭圆及其标准方程(第一课时)”教学为例

翟晓雨，杨静宇，张欣瑞，姜荣游

赤峰学院数学与计算机科学学院，内蒙古 赤峰

收稿日期：2025年2月28日；录用日期：2025年4月20日；发布日期：2025年4月29日

### 摘要

数学问题不仅是数学活动的重要载体，还能有效激发学生的数学思维，并引导他们进行深入地数学探究。本文以椭圆及其标准方程(第一课时)为例，通过创设合理的问题情境引导学生进行数学探究，帮助学生构建新知，以此来发展学生的数学学科核心素养。

### 关键词

问题引领，数学探究，椭圆及其标准方程

# Guide Mathematical Exploration through Problem Guidance

## —Taking the Teaching of “Ellipse and Its Standard Equations (the First Lesson)” as an Example

Xiaoyu Zhai, Jingyu Yang, Xinrui Zhang, Rongyou Jiang

College of Mathematics and Computer Science, Chifeng University, Chifeng Inner Mongolia

Received: Feb. 28<sup>th</sup>, 2025; accepted: Apr. 20<sup>th</sup>, 2025; published: Apr. 29<sup>th</sup>, 2025

### Abstract

Mathematical problems are not only an important carrier of mathematical activities, but also can effectively stimulate students' mathematical thinking and guide them to carry out in-depth mathematical exploration. This article takes ellipses and their standard equations (the first lesson) as an example to guide students to conduct mathematical exploration by creating reasonable problem situations and helping students build new knowledge, so as to develop students' core literacy in

mathematics.

## Keywords

Problem Guidance, Mathematical Exploration, Ellipse and Its Standard Equation

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 问题提出

数学问题不仅是数学活动的重要载体,还能有效激发学生的数学思维,并引导他们进行深入地数学探究。问题引领教学是教师基于学生已有知识、经验,创设情境和预设问题,引领学生在问题解决的过程中学会思考、构建新知、积累经验、发展能力的一种教学方法或形式。问题引领教学以启发式教学原理为基础,立足于建构主义理论,这要求教师要善于创设问题情境,适时启发和引导学生探究,促进学生主动建构新知。提高问题引领教学的有效性重在落实问题选择的科学性、学生参与的积极性以及问题点拨的适切性。此外,以问题引领的教学设计可以帮助学生明确数学思维的方向,使其在探究和解决问题的过程中积累学习经验,掌握相关的数学知识和技能,同时提升其数学核心素养。因此本节课结合教学实际创设有效问题,遵循“教师为主导,学生为主体”的探究式教学理念,让学生在问题的驱动下通过动手实践、自主探究、合作交流来构建新知,以此深化学生对知识的深度理解,提高学生的学习能力及数学核心素养。

## 2. 教学分析

《椭圆及其标准方程》选自 2019 人教版《普通高中教科书数学(A 版)选修性必修(第一册)》第三章第一节《椭圆》第一课时。如图 1 是平面解析几何的内容分析。“椭圆及其标准方程”是在学生已经学过平面直角坐标上圆的方程的基础上,运用“曲线和方程”理论解决具体的二次曲线的又一实例,是研究椭圆几何性质的基础,它也为我们后续研究双曲线、抛物线这两种圆锥曲线提供了基本模式,因此这节课起着承前启后的作用,是高中数学重点内容之一[1]。

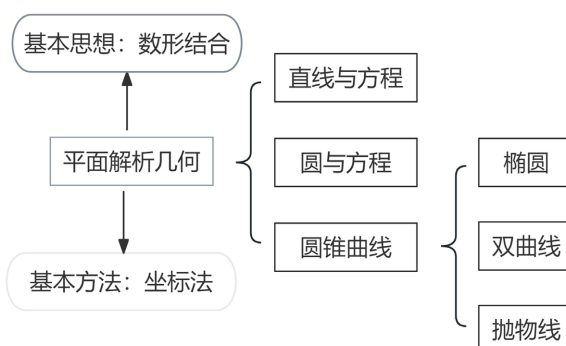


Figure 1. Content analysis of plane analytic geometry

图 1. 平面解析几何内容分析

学生已经学习了圆的概念及其方程,初步认识了解析几何内容的特征,即是一门借助坐标法研究几

何的学科，并且已经初步体验到了数形结合的基本思想；学生有动手体验和探究的兴趣，有一定的观察分析和逻辑推理的能力；学生有建立圆的概念和方程的经历，掌握了求曲线方程的一般步骤和方法。但在归纳椭圆定义时，学生不容易用严谨、精准的语言描述；此外，在求椭圆标准方程时，会遇到比较复杂的根式化简问题，会使学生推导椭圆的标准方程带来一定的困难，因此需要教师创设有效问题，引领学生自主探究来突破难点。

通过对课程标准、教学内容以及学情的分析，将本节课的教学目标设定为：1) 能从现实生活中抽象出椭圆，能通过实例知道椭圆在生产、生活中有广泛的应用；2) 能通过实际绘制椭圆和 GeoGebra 演示实验的过程认识椭圆上点的几何特征，归纳出椭圆的定义，发展数学抽象素养；3) 能类比圆的方程建立的步骤，建立适当的坐标系，得到椭圆的标准方程，在这个过程中体会类比、数形结合、分类讨论以及方程思想，发展直观想象、数学运算素养[2]。本节课的教学重点是：掌握椭圆的几何特征，椭圆的定义及椭圆的标准方程。本节课的教学难点是：椭圆的标准方程的推导。

### 3. 教学过程

#### 1) 情境引入，认识椭圆

##### 内容 1：从现实生活中抽象出椭圆。

借助多媒体，通过倾斜水杯的水面，行星绕太阳运动的轨迹，如图 2 所示，促使学生提炼它们的共性特征——椭圆形。

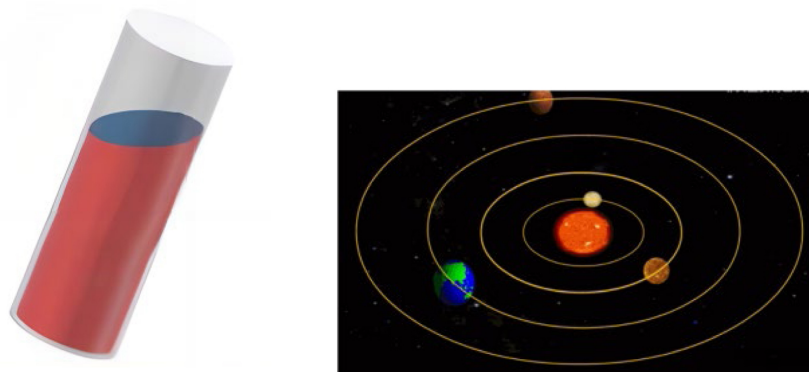


Figure 2. Ellipses in daily life  
图 2. 生活中的椭圆

问题 1：倾斜水杯的水面是什么形状？行星绕太阳运动的轨迹是什么形状？

问题 2：你还能想到生活中还有哪些椭圆吗？

学生活动：学生积极思考、讨论，列举生活中的椭圆实例，如家里的盘子、钟表、马路上油罐车的横截面等，进一步体会椭圆的普遍存在。

【设计意图】通过具体的实例设置问题情境，让学生直观了解椭圆以及其应用，激发学习兴趣，体会数学与生活的紧密联系，提升用数学的眼光观察现实世界的能力。问题 1、2 的提出，引导学生主动从现实生活中抽象出了椭圆的形象。

#### 2) 动手实验，直观感知

##### 内容 1：从画圆引出画椭圆。

回忆圆的画法。把一条细绳对折，将其中一端固定，另一端套上一支笔，拉紧绳子，移动笔尖，画圆，如图 3。改变圆定义中的关键要素，引出画椭圆。

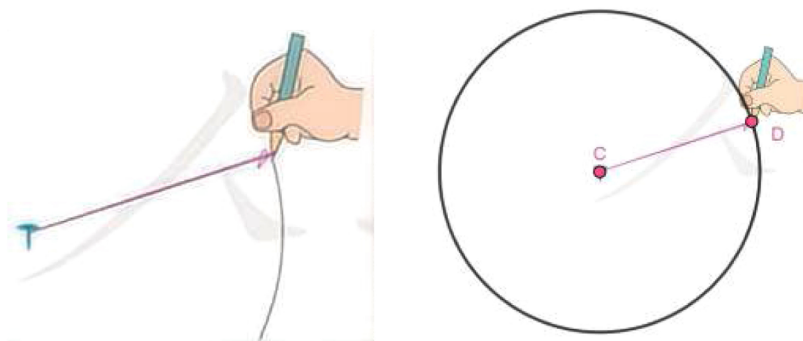


Figure 3. Drawing a circle

图 3. 画圆

问题 3: 你能从圆的画法的过程中归纳出圆的定义吗?

问题 4: 思考改变圆定义中的关键要素能否画出椭圆?

学生活动: 学生尝试改变圆定义中的关键要素, 发现将一个定点改为两个定点, 固定绳长, 移动笔尖, 能够画出椭圆。

【设计意图】从学生已有的经验出发, 通过画图活动, 使学生改变圆定义的关键要素, 画出更多的图形, 从而发现椭圆的生成, 建立圆与椭圆的联系, 激发学生的求知欲望。问题 4 的提出, 适时启发了学生画出椭圆。

内容 2: 通过实验归纳椭圆的定义。

利用纸板和细绳画椭圆, 如图 4。取一条定长的细绳, 把它的两端分别固定在纸板的两点, 套上一支笔, 拉紧绳子, 移动笔尖, 画出的轨迹是什么曲线[3]? 学生以两人为一组进行合作, 完成画椭圆活动。

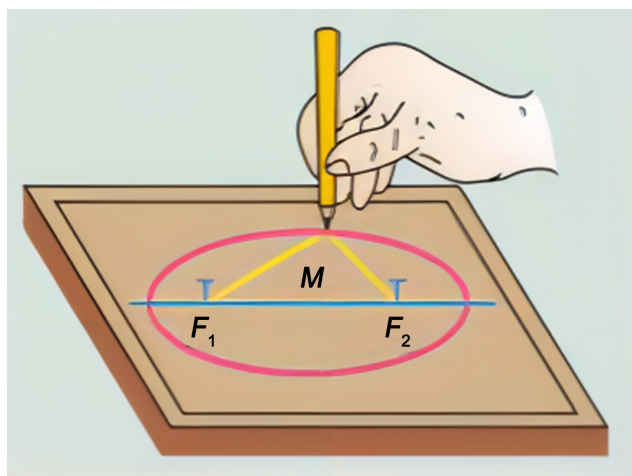


Figure 4. Drawing an ellipse

图 4. 画椭圆

通过动态软件 GeoGebra 直观观察画椭圆的探究活动, 如图 5, 并对  $MF_1$ 、 $MF_2$ 、 $F_1F_2$  的长度进行测量。

问题 5: 这个过程中涉及几个点? 变量、不变量有哪些?

问题 6: 你能根据椭圆的几何特征仿照圆的定义归纳出椭圆的定义吗?

学生活动: 学生 A 归纳椭圆定义: 平面内与两定点的距离的和等于常数的点的轨迹是椭圆。

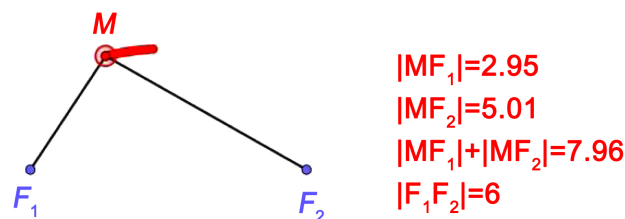
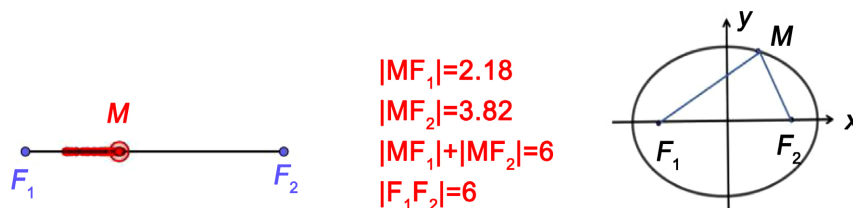


Figure 5. Drawing an ellipse with GeoGebra

图 5. GeoGebra 画椭圆

问题 7: 平面内与两定点的距离的和等于常数的点的轨迹一定是椭圆吗?

通过 GeoGebra 演示  $MF_1 + MF_2 = F_1F_2$  的情况, 如图 6。

Figure 6. GeoGebra 演示  $MF_1 + MF_2 = F_1F_2$  的情况图 6. GeoGebra illustrates the case of  $MF_1 + MF_2 = F_1F_2$ 

学生活动: 借助 GeoGebra 软件, 学生积极观察、思考并讨论, 逐步归纳出椭圆的严谨定义。

【设计意图】动手实践画出椭圆, 培养学生的合作探究能力。利用 GeoGebra 这一动态软件, 使学生更加直观地观察探究活动, 在直观感知的过程中提升直观想象素养。问题 7 的提出, 引发了学生对椭圆定义地认知冲突, 启发学生探究椭圆的严谨定义, 有助于学生主动建构椭圆定义这一新知。问题引领, 层层深入, 让学生在观察、实验的过程中体会定义中常数加以限制的原因, 引导学生发现、概括出椭圆严谨定义, 学生通过体验椭圆定义抽象的完整过程, 发展数学抽象素养。

### 内容 3: 完善椭圆的定义。

归纳椭圆严谨定义, 并用符号语言表述。强调定义中需要注意的三点。

椭圆定义: 平面内与两定点  $F_1$ 、 $F_2$  的距离的和等于常数(大于  $|F_1F_2|$ )的点的轨迹叫做椭圆。 $F_1$ 、 $F_2$  叫做椭圆的焦点, 焦距  $|F_1F_2| = 2c$ 。

问题 8: 你能用符号语言表述椭圆的定义吗?

问题 9:  $2a$  与  $2c$  关系下,  $M$  点的轨迹是怎样的?

问题 10: 椭圆定义中有哪些需要注意的点?

学生活动: 学生根据椭圆定义用符号语言准确表述椭圆定义, 探讨  $2a$  与  $2c$  关系下  $M$  点轨迹的多样性, 深入理解椭圆定义中的关键要素。

【设计意图】学生将椭圆定义的文字语言转化为符号语言, 提升学生用数学的语言表达现实世界的能力。通过  $2a$  和  $2c$  的大小关系不同时点的轨迹不同以及椭圆定义中需要注意的几点, 强调椭圆定义的严谨性。在问题 8、9、10 的引领下, 学生逐步深化对椭圆定义的理解。

### 内容 4: 探究椭圆的标准方程。

根据研究的一般思路, 在得到椭圆的定义之后, 就可以来研究椭圆的标准方程。

问题 11: 回忆探究圆的标准方程的步骤有哪几步?

学生活动：回忆探究圆的标准方程的步骤这一旧知，即建系 - 设点 - 列式 - 化简。

【设计意图】呈现解析几何研究问题的基本思路，明确建立椭圆的方程的大致步骤。问题 11 是基于学生的已有经验设置的，引导学生类比探究圆的标准方程的步骤来探究椭圆的标准方程。

问题 12：观察椭圆的形状，怎样建立坐标系使椭圆方程形式简单？

追问：椭圆是对称的，它的对称轴是什么呢？

学生活动：通过追问，学生想到利用椭圆的对称轴建立坐标系，如图 7。

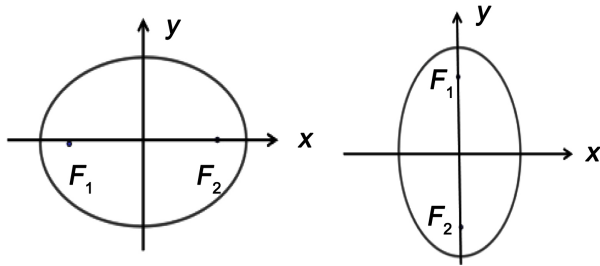


Figure 7. Explores the standard equation of the ellipse—build a department  
图 7. 探究椭圆的标准方程——建系

【设计意图】通过追问，引导学生根据椭圆对称性的特点来建立恰当的直角坐标系，通过以焦点在  $x$  轴图形为例探究椭圆的标准方程，渗透学生分类讨论的数学思想。

问题 13：设  $M(x, y)$  是椭圆上任意一点，椭圆的焦距为  $2c (c > 0)$ ，你能用设出的点来表示其它点的坐标吗？

【设计意图】根据椭圆的几何特征用坐标表示椭圆的关键点，发展直观想象素养。

问题 14：你能根据椭圆的定义以及限制条件列出等式吗？

【设计意图】列式的过程中渗透数形结合、方程的数学思想。

问题 15：等式左边是两个根式和的形式，怎样化简更为简单？

追问 1： $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$  是最简形式吗？

追问 2：在数学中，我们讲究对称美、简洁美，能否将  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  这个式子中的  $a^2 - c^2$  再转化一下？

问题 16：你能从图 8 中找出表示  $a, c, \sqrt{a^2 - c^2}$  的线段吗？

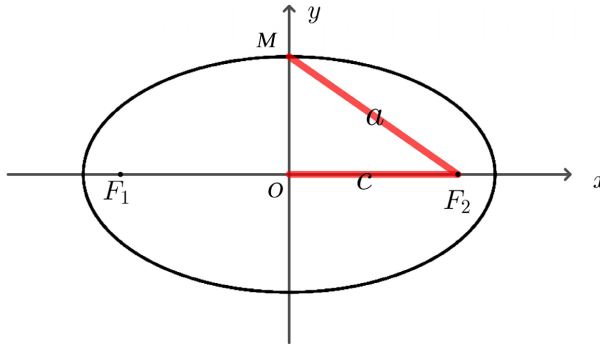


Figure 8. Shows  $a^2 - c^2$   
图 8. 表示  $a^2 - c^2$

【设计意图】让学生亲历方程的推导与化简过程，发展其数学运算核心素养。借助化简时追问 1、2 的问题，培养学生的数学美以及猜想意识。介绍椭圆标准方程中每个参数的几何意义，从数和形两方面深化学生的理解。问题 11 是探究椭圆标准方程步骤的总问题，问题 12 至问题 16 则是各个步骤的子问题，通过层层递进的追问，引导学生逐步深入主动构建椭圆的标准方程。

类比焦点在  $x$  轴上的椭圆的标准方程探究焦点在  $y$  轴上的椭圆的标准方程。

问题 17：类比焦点在  $x$  轴上的椭圆的标准方程，你能探究出焦点在  $y$  轴上的椭圆的标准方程吗？

追问：除了通过建系 - 设点 - 列式 - 化简这四个步骤来探究焦点在  $y$  轴上的椭圆的标准方程，你还有其它更简便的方法吗？

学生活动：有了焦点在  $x$  轴上的椭圆的标准方程探究过程的经验，学生能够积极主动探究焦点在  $y$  轴上的椭圆的标准方程。而通过追问，引发了学生的认知冲突，激发学生探索简便的探究方法。

问题 18：焦点在  $x$  轴和焦点在  $y$  轴上的这两种椭圆的标准方程，其形式上有什么特点？

【设计意图】学生自主探究，强化研究曲线方程的一般思路。得到两种标准方程后，观察思考其特点，强化椭圆标准方程的形式。

3) 迁移应用，深化理解

例 1：已知椭圆的两个焦点的坐标分别是  $(-2,0),(2,0)$ ，并且椭圆经过点  $(\frac{5}{2},-\frac{3}{2})$ ，求它的标准方程。

学生活动：学生根据本节课所学新知，积极运用解决例 1。

【设计意图】通过例 1，及时巩固椭圆的标准方程这一知识。促使学生自主应用本节课知识来解决问题，让学生在解题过程中不断完善知识体系，形成结构化的数学思维。

4) 反思提炼，总结升华

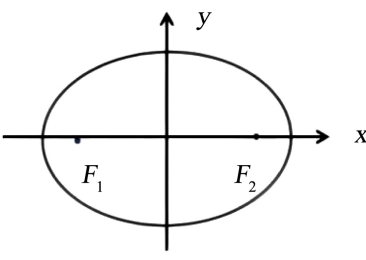
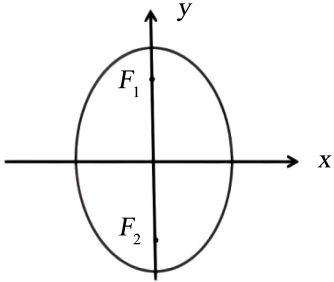
a) 知识

i) 定义

ii) 标准方程

Table 1. Class summary

表 1. 课堂小结

|                 | 焦点在 $x$ 轴                                                                            | 焦点在 $y$ 轴                                                                             |
|-----------------|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| 图形              |  |  |
| 方程              | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$                                  | $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$                                   |
| 焦点              | $(\pm c, 0)$                                                                         | $(0, \pm c)$                                                                          |
| 焦距              | $2c$                                                                                 |                                                                                       |
| $a, b, c$ 之间的关系 | $c^2 = a^2 - b^2$                                                                    |                                                                                       |

两种标准方程如表 1 所示。表 1 总结了两种椭圆标准方程的图形、方程、焦点、焦距、 $a, b, c$  之间的关系。

b) 数学思想

数形结合、方程、分类讨论、类比

c) 核心素养

数学抽象、直观想象、数学运算

【设计意图】从知识、数学思想、核心素养这三方面进行总结，如表 1，培养学生归纳、反思能力。用表格形式对所学内容进行总结，有助于学生构建知识网络，形成知识脉络。

5) 作业设计，巩固提高

a) 必做题

课本练习 1、2、3、4。

b) 选做题

查阅相关资料，了解丹德林双球模型，验证倾斜水杯的水面是否是数学意义上的椭圆，如图 9。

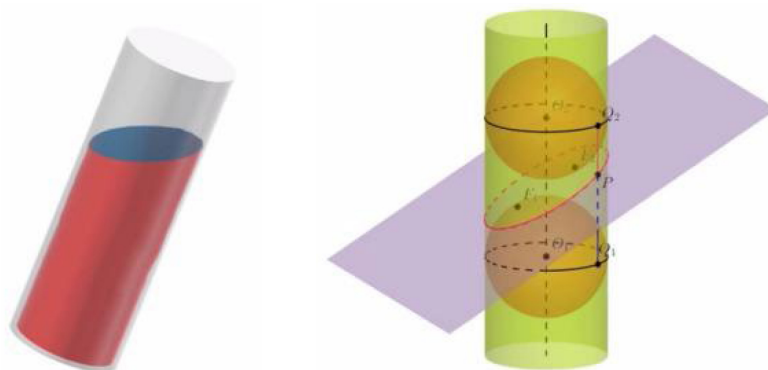


Figure 9. The Danderging two-ball model

图 9. 丹德林双球模型

【设计意图】遵循因材施教的原则，设计分层作业，必做题是对本节课所学知识的巩固，选做题是对本节课的拓展。选做题与情景引入环节情境相呼应，体现数学与生活的紧密联系。

#### 4. 教学反思

通过对学生课堂表现的观察以及课下与学生的交流，发现问题引领式教学通过系列有层次的问题设计，有效激发了学生的探究欲望和学习积极性，学生愿意积极思考并主动参与问题的讨论，在问题引领下进行了数学探究，积极主动建构了知识体系。问题引领式教学使教学在保持课堂活力的同时也实现教学质量的显著提升。

但是，在通过问题引领教学时 also 需要注意以下两点。一是教学时要渗透数学方法，揭示数学本质。数学思想方法存在问题解决的过程中，因此在问题教学中，问题串的设计要体现数学思想方法的渗透[4]。如问题 3 至问题 6、问题 12、问题 17 渗透了类比的数学思想方法，问题 3 至问题 6 引导学生类比圆的定义归纳椭圆的定义，问题 12 引导学生类比圆标准方程的探究过程探究椭圆的标准方程，问题 17 引导学生类比焦点在  $x$  轴上的椭圆的标准方程探究出焦点在  $y$  轴上的椭圆的标准方程。以及问题 16 渗透了数形结合的思想方法，引导学生借助图来转化  $a^2 - c^2$ ，从而使得椭圆标准方程更加简洁。二是重视问题层次，发展逻辑推理。在问题设置中充分考虑学生的认知特点和思维发展规律，注重问题的结构性和层次性，

使其在思考、理解、内化知识的过程中积累学习经验,提高解决问题的能力以及逻辑推理能力[5]。如通过问题 11 引导学生明确探究椭圆标准方程的步骤,再借助问题 12 至 16 细化建立椭圆标准方程的过程,是每一个步骤清晰明确,有利于学生类比焦点在  $x$  轴上的椭圆的标准方程探究出焦点在  $y$  轴上的椭圆的标准方程,也有利于学生自主构建知识体系。

本文以一节新授课为例给出了问题引领式教学的案例分析,此外复习课和习题课亦可以以问题引领进行教学,使学生在问题解决的过程中完成知识的梳理和认知结构的完善。总之,以问题引领的课堂教学需要遵循以学生为主体的教学原则,确保每一个问题都能落在学生的最近发展区,注重问题的层次性,通过问题串来引导学生进行数学探究,以此来发展学生的数学学科核心素养。

## 基金项目

内蒙古自治区十四五规划课题(2023NGHXX065)。

## 参考文献

- [1] 高艳芬. “椭圆及其标准方程”(第 1 课时)教学设计[J]. 中学数学教学参考, 2017(36): 14-16.
- [2] 中华人民共和国教育部. 高中数学课程标准(2017 年版 2020 修订版) [S]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [3] 人民教育出版社, 课程教材研究所, 中学数学课程教材研究开发中心. 普通高中教科书数学(选择性必修第一册) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2019.
- [4] 汪本旺. 立足问题引领, 促进深度理解——以两角差余弦公式问题串教学为例[J]. 中学数学研究, 2024(12): 1-4.
- [5] 常章亮. 基于问题引领开展深度学习——以“指数函数的图象与性质”教学为例[J]. 高中数学教与学, 2024(24): 27-29+39.