College and Job 职业教育发展, 2025, 14(5), 180-186
Published Online May 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ve
https://doi.org/10.12677/ve.2025.145213

Hans汉斯

分形理论驱动的高职数学教学重构与实践

李　萍

周口技师学院文化基础课部，河南　周口

收稿日期：2025年4月1日；录用日期：2025年5月14日；发布日期：2025年5月21日

摘　要

分形理论作为一种描述自然界复杂结构和不规则现象的关键工具，近些年来在多个领域取得了显著的应用成果。基于自相似性与分形维数等核心概念，该理论揭示了从微观到宏观尺度广泛存在的非线性规律。本文系统地阐述了分形理论的数学基础，并针对其在专科院校教学实践中面临的挑战提出了具体的解决方案。研究旨在为分形理论的理论深化及其工程化应用提供全面的参考依据，同时为职业教育培养具备复杂系统思维的技术人才探索创新路径。

关键词

分形理论，分形维数，自相似性，职业教育

Reconstruction and Practical Application of Higher Vocational Mathematics Teaching Guided by Fractal Theory

Ping Li

Basic Culture Department, Zhoukou Technician College, Zhoukou Henan

Received: Apr. 1st, 2025; accepted: May 14th, 2025; published: May 21st, 2025

Abstract

Fractal theory, as a critical tool for characterizing complex structures and irregular phenomena in nature, has demonstrated substantial application value across multiple domains in recent years. Built upon foundational concepts such as self-similarity and fractal dimension, this theory reveals nonlinear laws that are prevalent at both microscopic and macroscopic scales. This paper system-

文章引用: 李萍. 分形理论驱动的高职数学教学重构与实践[J]. 职业教育发展, 2025, 14(5): 180-186.
DOI: 10.12677/ve.2025.145213

atically elucidates the mathematical foundations of fractal theory and addresses specific challenges encountered during its implementation in vocational college teaching practices by proposing targeted solutions. The study aims to provide a comprehensive reference framework for advancing the theoretical exploration and engineering applications of fractal theory, while also exploring innovative strategies for vocational education to cultivate technical talents with complex system thinking capabilities.

Keywords

Fractal Theory, Fractal Dimension, Self-Similarity, Vocational Education

1. 引言

自然界中诸多现象，如山脉轮廓、河流路径、云朵形态、植物生长模式以及金融市场的波动等，均表现出高度复杂性和不规则性。传统的欧几里得几何难以对这些复杂的自然形态进行精确描述与分析。分形理论的提出为理解和研究这些复杂现象提供了全新的视角和方法[1]-[3]。该理论突破了传统几何学关于规则性和光滑性的假设，专注于具有自相似性和尺度不变性特征的复杂几何形状及现象的研究。自其诞生以来，分形理论已从数学领域的抽象概念逐步演变为跨学科研究中的重要工具[4] [5]。其核心思想在于利用自相似性、分形维数与尺度不变性来描述自然界中广泛存在的不规则与复杂系统，从而深刻改变了传统几何学对规则性与光滑性的依赖。在物理学领域，分形被应用于湍流模拟和星系分布等非线性现象的研究；在生物学领域，肺气管分支、植物根系等自然结构的分形特征为功能优化提供了数学解释；在地球科学领域，基于分形理论开发了浓度–面积(C-A)模型[6]，频谱–面积(S-A)模型以及局部奇异性理论等成矿预测模型[7] [8]；在工程领域，分形几何已经成为材料表面分析和机械故障预测的关键方法。近年来，随着人工智能与大数据技术的快速发展，分形理论进一步渗透到深度学习模型优化等前沿领域，展现出巨大的应用潜力[9] [10]。

然而，尽管分形理论在科学研究与工程实践中取得了显著成就，其在教育领域尤其是高等职业教育中的应用，仍面临诸多挑战。当前高职数学教学多以欧氏几何与线性分析为核心内容，侧重于公式推导与数值计算，但在培养学生解决复杂工程问题的能力方面(如非均匀材料性能预测、数字图像特征提取等)，存在明显的局限性。已有研究表明，由于高职学生数学基础相对薄弱，他们对抽象概念(如分形维数、迭代函数系统)的理解往往停留在表面层次，难以实现理论与实际工程场景的有效结合[11]-[13]。此外，随着职业教育“岗课赛证”融通理念的深入实施，课程内容需紧密对接产业技术革新需求，这进一步凸显了传统教学模式的滞后性。

针对上述问题，国际教育界已积极开展探索。例如，德国双元制教育体系通过将分形建模融入机械工程课程，借助企业案例库与虚拟仿真工具，有效提升了学生对复杂系统分析的能力[14]。美国社区学院则通过引入分形艺术设计激发学生的学习兴趣，并结合 Python 编程实现“理论–实践”一体化教学模式。然而，当前研究多集中于分形理论的教学演示或单一案例应用，缺乏系统化的课程框架设计及定量效果评估，尤其鲜有针对高职教育类型化需求的专门研究。本研究立足于高职教育类型化发展要求，通过构建“理论–算法–应用–评估”四位一体的教学体系，探索分形几何在计算机图形学、机械故障诊断等

领域的教学转化路径。这种基于分形思维的教学改革不仅能够突破传统几何教学的维度限制，还有助于培养学生在复杂系统中的模式识别能力和创新性工程思维，为专科院校数学课程与专业课程的有机衔接提供理论支持和实践范例。

2. 分形的定义与性质

2.1. 分形的定义

分形作为一种用于描述具有自相似和尺度不变性复杂物体或图案的数学概念，最早是由美籍法国数学家曼德布罗特(B. B. Mandelbrot)在 20 世纪 70 年代提出[2]。分形可以划分为规则分形与不规则分形两类。在分形理论正式提出之前，已有数学家对多种复杂且非光滑的集合进行了研究并提出相关模型，如康托尔集(Cantor Set)和科赫曲线(Koch Curve)等。这些集合属于规则分形模型，具备严格的自相似性特征。而自然界中的许多现象，由于其生长过程具有随机性(如曲折的海岸线，松树树枝的分叉结构等)，往往表现出统计意义上的相似性，并仅在特定的标度不变区域内成立，这类现象被归类为不规则分形[15] [16]。

严格而言，分形目前尚未形成被广泛接受的严格数学定义，更多是通过描述性方式加以界定。从直观角度来看，分形是一种具有高度不规则性和自相似结构的几何对象或集合，其复杂程度无法通过传统的欧几里得几何进行准确刻画。曼德布罗特首次将分形定义为豪斯道夫维数严格大于其拓扑维数的集合，这一定义突出了分形的非整数维数特性，突破了传统整数维数的限制，揭示了分形在空间填充和复杂程度上的独特性质。

2.2. 分形的性质

分形理论的核心特征在于其独特的自相似性和尺度不变性。自相似性表现为分形结构在不同观测尺度下，局部与整体形态呈现出高度一致性，如图 1 所示，科赫曲线和谢尔宾斯基(Sierpinski)等边三角的每一段边缘分支均与整体轮廓具有几何同构关系[17]-[19]。此外，自然界中的山脉轮廓、肺气管分叉等现象虽未达到严格数学意义上的精确自相似性，但在统计意义上展现出多尺度递归模式。尺度不变性则进一步揭示了分形在标度变换下的不变规律：即使改变观察尺度，分形结构的复杂度和细节特征仍保持恒定，其几何不规则性可通过分形维数(如盒维数、豪斯多夫维数)进行定量刻画，这一参数突破了传统整数维的限制，成为刻画复杂形态的重要指标[2]。

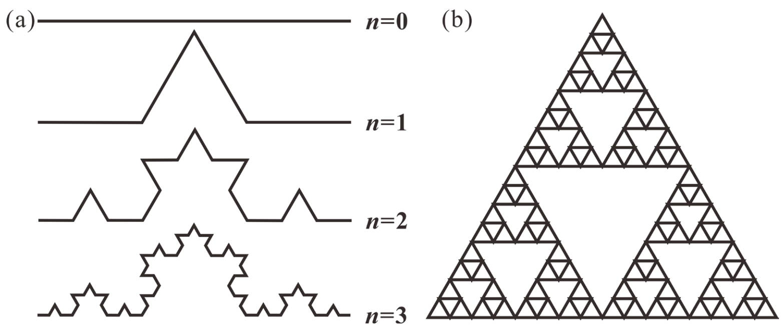

Figure 1. (a) Koch curve; (b) Sierpinski equilateral triangle
图 1. (a) 科赫曲线；(b) 谢尔宾斯基等边三角形

2.3. 分形维数

分形维数是分形理论中的核心概念，为定量描述分形的复杂性提供了关键的度量工具。在传统的欧

几里得几何中，图形的维数通常为整数，例如点为零维，直线为一维，平面为二维，立体为三维。然而，分形的出现突破了整数维数的限制，其维数通常是分数或非整数，这充分体现了分形在空间填充和复杂性方面的独特特征。常见的分形维数主要包括豪斯多夫维数(Hausdorff Dimension)、信息维数(Information Dimension)、关联维数(Correlation Dimension)以及盒维数(Box-Counting Dimension) [20]-[22]。以下将对这些分形维数的定义及计算方法进行详细阐述。

豪斯多夫维数是分形几何中最为基础的维度概念之一，它从测度论出发，为任意集合(尤其是复杂分形)提供了一种严格的维度定义。通过基于集合覆盖的测度计算方法，该维数能够有效揭示分形的本质特征。能够反映分形的本质特性。尽管其在理论研究中具有重要价值，但由于计算过程复杂，直接应用实际问题存在较大难度，因此主要被用于数学分析以及分形性质的验证与探讨。

信息维数是分形理论中用于量化复杂系统不均匀性的重要指标，通过计算每个盒子中元素出现的概率，并结合信息熵的概念，可以推导出信息维数的表达式，从而有效反映分形结构中概率分布的异质性特征。这一方法在分析具有自相似且分布不均匀的分形结构特尤为适用。计算公式如下：

$$D_I = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \ln p_i}{\ln \varepsilon} \tag{1}$$

其中，D_I 表示信息维数，ε 为覆盖分形集合的盒子大小，$N(\varepsilon)$为覆盖分形集合所需大小为 ε 盒子数量，p_i 为第 i 个盒子中所包含分形集合的概率分布。

关联维数是分形理论中的一个关键指标，用于量化复杂系统中点集分布的特征，特别适用于混沌时间序列分析及动力系统相空间重构的研究。其本质在于通过统计点对间距离分布规律，揭示系统的几何复杂性。计算公式如下：

$$D = \lim_{r \to 0} \frac{\ln C(r)}{\ln r} \tag{2}$$

r 为给定距离的尺度，$C(r)$为相关函数，表示在相空间中距离小于 r 的点对的数目占总点对的比例。

盒维数，亦称为盒计数维数，是分形几何领域中一种广泛应用的分形维数度量方法。该方法通过统计覆盖分形结构所需盒子的数量与盒子尺寸之间的变化关系，用于量化系统的几何复杂性。由于盒维数在估算方法上具有相对简便性以及结果的高可靠性等特点，本文选取盒维数法对相关结构进行分形维数的计算。其计算公式如下：

$$D \propto -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln(N(\varepsilon))}{\ln(\varepsilon)} \tag{3}$$

其中，$\propto$ 表示正比例关系，ε_i 为格子尺度，$N(\varepsilon_i)$表示在尺度 ε_i 下覆盖所需的格子数量，c 为常数，D 为分形维数的估计值。其具体计算步骤如下：

1) 生成一组尺度为的 $\varepsilon \times \varepsilon$ 网格，并将其覆盖于分析对象之上；

2) 统计不同尺度 ε 的格子完全覆盖研究对象所需的盒子数量 $N(\varepsilon)$；

3) 将不同尺度 ε 及其对应的盒子数量 $N(\varepsilon)$投影到双对数坐标图上，利用最小二乘法拟合 $\log(\varepsilon)$和 $\log(N(\varepsilon))$的斜率，从而估算研究对象的分形维数 D。本文选取计算机模拟的扩散限制聚集(DLA)生长曲线为研究对象，该曲线被不同尺度的正方形网格划分为如图 2 所示的形态，其中棕色区域表示被覆盖的网格。根据表 1 中列出的不同网格格子尺度及其对应的覆盖格子数量，最终计算得出分形维数 $D = 1.3838$。

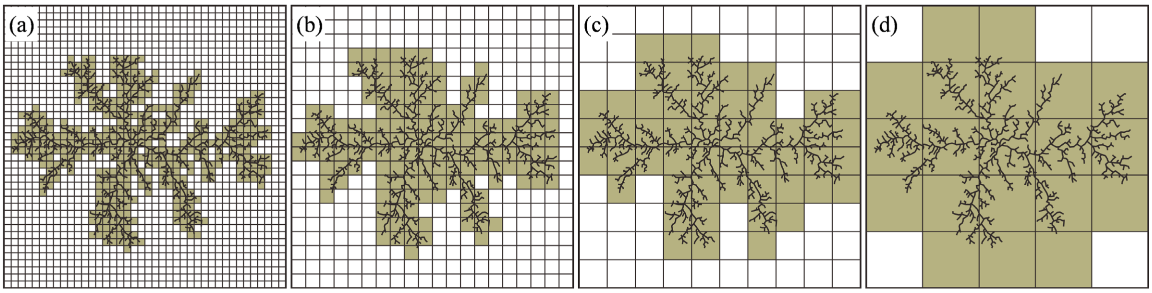

Figure 2. Growth model of DLA simulated by computer. (a) The cell size is 1; (b) The cell size is 2; (c) The cell size is 4; (d) The cell size is 8
图 2. 计算机模拟 DLA 生长模式图。(a) 格子尺度为 1；(b) 格子尺度为 2；(c) 格子尺度为 4；(d) 格子尺度为 8

Table 1. Grid scale and corresponding number of grids
表 1. 网格尺度及对应格子数量

格子尺度	1	2	4	8
格子数量	340	155	52	20

3. 分形理论在专科院校的教学实践与创新路径

分形理论作为连接数学抽象性与工程实用性的关键工具，在专科院校的数学教学中展现出显著的应用价值和教学潜力。然而，近年来在专科院校的教学实践中，分形理论的应用面临着诸多现实挑战。这些挑战不仅体现在学生对复杂理论的理解上，还涉及课程设计、教学资源整合以及教学内容更新等多个层面。

为了验证分形理论驱动的专科数学教学方法的效果及其在工程实践中的应用价值，本文以河南省某高职专科院校机械专业的学生为研究对象，设计并实施了一项实验。实验分为两组进行：实验组和对照组，每组各 40 人。在实验开始前，所有学生均接受了统一的数学能力测试，以确保两组学生的数学基础水平一致。实验组采用传统数学教学与分形案例教学相结合的方式，课程内容涵盖欧式几何、常规数学分析和分形理论的核心概念(如自相似性、分形维数)及其在工程实践中的具体应用案例；对照组则仅接受传统的数学教学法，课程内容限于欧式几何与常规数学分析。整个课程持续 8 周，每周安排 4 课时。实验结果通过课程结束后的测试成绩进行评估，两组学生的具体成绩对比如表 2 所示。

Table 2. Comparison of scores of students in different mathematics courses
表 2. 不同数学课程学生成绩对比表

组别	样本数	最高分	最低分	平均分	中位分	标准差
实验组	40	93	55	68.4	64	11.5
对照组	40	94	63	78.3	79	7.8

当前数据表明，对照组在教学效果方面显著优于实验组，特别是在成绩集中度与稳定性上表现更为突出。具体而言，实验组的最高分(93)与对照组的最高分(94)仅相差 1 分，这表明两组均存在优秀学生。然而，最低分差异较为显著：实验组最低分为 55 分，而对照组最低分为 63 分，二者相差 8 分，表明实验组可能存在部分学生未适应新的教学方法或教学内容难度较高。此外，实验组成绩波动较大，其标准差为 11.5，显著高于对照组的标准差 7.8，表明实验组学生成绩差异较大，可能存在两极分化现象。相比之下，对照组较小的标准差表明其学生成绩分布更加均匀，教学效果更为稳定。综上所述，加入分形理

论教育的课程相较于传统教学方法，在提升学生总体成绩方面效果有限。尽管两组最高分基本相同，但最低分和平均成绩差异较大，这表明普通专科学院的学生在学习分形理论相关知识时面临较大困难。以下将从多个角度对这一现象进行深入分析。

首先，学生数学基础的薄弱显著制约了其对分形概念(如分形维数、自相似性)的深入理解。高职学生普遍缺乏非线性数学与递归思想的系统训练，这使其在分形几何的迭代过程与维度计算中容易陷入认知困境。其次，传统教学模式过度依赖欧氏几何与线性分析方法，削弱了分形理论与工程实践之间的有机联系。此外，教学方法单一化和课程体系碎片化的问题尤为突出。灌输式教学方式导致学生被动接受公式推导，缺乏通过编程实践(如使用 Python 生成科赫曲线)主动探索分形规律的机会，从而降低了课堂参与度并影响了创新思维的培养效果。最后，评估机制局限于传统的考试形式，未能充分关注复杂系统分析能力与工程应用能力的多维评价，难以全面反映分形思维对学生技术素养提升的实际作用。

针对分形理论教学中存在多方面问题，本研究提出构建“理论－算法－应用－评估”四位一体的教学改革框架。首先，实施分层递进教学策略，通过增设“非线性数学基础”预修课程，强化学生对递归函数与概率统计等核心工具的掌握，并采用“基础理论→算法实现→产业案例”的三阶段渐进式教学模式，逐步提升学习难度。其次，以产业需求为导向，开发模块化课程体系，整合分形理论在机械工程、计算机图形学等领域的典型应用案例，从而实现抽象概念的具体化呈现。第三，推行“做中学”教学方法，引入 Python 编程任务(如盒维数计算工具链开发)与分形艺术设计项目，通过“分形技术工单”将课堂教学嵌入真实工程场景，激发学生创新潜能。第四，建立多元动态评估机制，将理论考核、实践项目、创新方案与团队协作相结合，并利用学习分析技术追踪学生编程与建模过程数据，生成个性化能力图谱，为教学优化提供数据支撑。最后，深化产教协同机制，联合企业开发分形特征提取、故障预测等实训项目，并将分形技能认证纳入“岗课赛证”融通体系，有效提升学生的职业竞争力。通过上述改革措施，可有效弥合分形理论抽象性与技术应用之间的差距，为职业教育培养具备非线性思维与复杂问题解决能力的复合型人才提供范式参考。

4. 结论

本研究以分形理论为核心驱动力，系统探讨了其在高等职业教育数学教学中的重构路径及其实践价值。通过梳理分形理论的数学基础及其跨学科应用潜力，并结合高职院校机械专业学生的教学实验，深入分析了将分形理论融入传统数学课程所面临的现实挑战与创新机遇。实验结果显示，尽管分形理论教学组(实验组)在平均成绩(68.4 分)和成绩稳定性(标准差 11.5)方面均低于传统教学组(对照组)，但在培养学生复杂系统思维及工程问题解决能力方面展现出独特潜力。具体而言，虽然实验组学生由于数学基础薄弱，在理解分形维数、自相似性等抽象概念时存在困难，但其在创新项目中表现出的探索意愿和跨学科联结能力，充分体现了分形思维对技术人才核心素养的潜在提升作用。

针对教学实践中存在的关键瓶颈问题，本研究构建了“理论－算法－应用－评估”四位一体的教学改革框架。通过分层递进的课程设计、产业案例驱动、编程实践嵌入以及动态评估机制，有效弥合了分形理论抽象性与工程应用之间的鸿沟。例如，引入 Python 编程任务和分形艺术设计项目，不仅深化了学生对分形规律的理解，还借助“做中学”的教学模式激发了学生的创新潜能。此外，通过深化产教协同机制并融入分形技能认证，为职业教育中“岗课赛证”融通提供了具有较强可操作性的实践路径，进一步强化了课程内容与产业需求之间的紧密衔接。然而，本研究仍存在若干局限性。首先，实验样本规模相对较小(每组仅 40 人)，且课程周期较短(仅为 8 周)，这可能对研究结果的普适性造成一定影响。其次，尽管评估机制已尝试引入多元化设计，但在对学生复杂系统分析能力的量化指标方面仍有待进一步完善。未来的研究可考虑扩大实验样本规模、延长教学周期，并开发基于分形思维的能力评价模型，以提升评

估体系的科学性和全面性。此外，结合人工智能技术优化分形算法教学工具，构建开放式分形案例资源库，将有助于降低学习门槛并显著提高教学效率。总体而言，基于分形理论的教学重构为高职数学教育提供了全新的范式，其通过非线性思维与工程实践的深度融合，为培养适应智能制造时代的复合型技术人才奠定了坚实基础。

参考文献

[1] Gianvittorio, J.P. and Rahmat-Samii, Y. (2002) Fractal antennas: A Novel Antenna Miniaturization Technique, and Applications. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, **44**, 20-36. https://doi.org/10.1109/74.997888

[2] Mandelbrot, B. (1967) How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension. *Science*, **156**, 636-638. https://doi.org/10.1126/science.156.3775.636

[3] Topper, B. and Lagadec, P. (2013) Fractal Crises—A New Path for Crisis Theory and Management. *Journal of Contingencies and Crisis Management*, **21**, 4-16. https://doi.org/10.1111/1468-5973.12008

[4] 宗永臣, 柴立和. 分形维数基于 DLA 模型的算法改进[J]. 科技导报, 2008, 26(5): 60-64.

[5] Xiao, F., Chen, Z., Chen, J. and Zhou, Y. (2016) A Batch Sliding Window Method for Local Singularity Mapping and Its Application for Geochemical Anomaly Identification. *Computers & Geosciences*, **90**, 189-201. https://doi.org/10.1016/j.cageo.2015.11.001

[6] Cheng, Q., Agterberg, F.P. and Ballantyne, S.B. (1994) The Separation of Geochemical Anomalies from Background by Fractal Methods. *Journal of Geochemical Exploration*, **51**, 109-130. https://doi.org/10.1016/0375-6742(94)90013-2

[7] Cheng, Q., Xu, Y. and Grunsky, E. (2000) Integrated Spatial and Spectrum Method for Geochemical Anomaly Separation. *Natural Resources Research*, **9**, 43-52. https://doi.org/10.1023/a:1010109829861

[8] Cheng, Q. (2007) Mapping Singularities with Stream Sediment Geochemical Data for Prediction of Undiscovered Mineral Deposits in Gejiu, Yunnan Province, China. *Ore Geology Reviews*, **32**, 314-324. https://doi.org/10.1016/j.oregeorev.2006.10.002

[9] Ghosh, I., Sanyal, M.K. and Jana, R.K. (2018) Fractal Inspection and Machine Learning-Based Predictive Modelling Framework for Financial Markets. *Arabian Journal for Science and Engineering*, **43**, 4273-4287. https://doi.org/10.1007/s13369-017-2922-3

[10] Sarkar, A., Maity, P.P., Ray, M., Chakraborty, D., Das, B. and Bhatia, A. (2023) Inclusion of Fractal Dimension in Four Machine Learning Algorithms Improves the Prediction Accuracy of Mean Weight Diameter of Soil. *Ecological Informatics*, **74**, Article 101959. https://doi.org/10.1016/j.ecoinf.2022.101959

[11] 宋晖, 王雨, 吴焱明, 张彦, 尹延国, 陈奇. 机加工表面的分形维数与粗糙度之间的关联规律研究[J]. 应用力学学报, 2022, 39(5): 895-900.

[12] 窦林贤. 分形几何在图案设计中的应用研究[J]. 安阳师范学院学报, 2018(2): 32-34.

[13] 武曈, 刘益才, 雷斌义. 分形理论及其传热研究现状[J]. 真空与低温, 2015, 21(5): 249-254.

[14] 汤华, 李永梅, 严红霞. 基于中德合作“双元制”本科项目专业基础课程改革——以“机械制图”课程为例[J]. 现代信息科技, 2019, 3(23): 181-183.

[15] 王东升, 汤鸿霄, 栾兆坤. 分形理论及其研究方法[J]. 环境科学学报, 2001, 21(S1): 10-16.

[16] 孙洪军, 赵丽红. 分形理论的产生及其应用[J]. 辽宁工学院学报, 2005, 25(2): 113-117.

[17] 赵芃, 王金婵, 彭欢庆, 向菲, 张立文. 基于分形谢尔宾斯基三角形模型的图像加密算法[J]. 计算机工程与设计, 2024, 45(11): 3216-3224.

[18] 秦耀辰, 刘凯. 分形理论在地理学中的应用研究进展[J]. 地理科学进展, 2003, 22(4): 426-436.

[19] 成雨, 卜颖滨, 万珍平, 等. 基于分形理论的磨削粗糙表面静摩擦系数模型[J]. 航空制造技术, 2024, 67(7): 125-130.

[20] Evertsz, C.J.G. and Mandelbrot, B.B. (1992) Multifractal Measures. In: Peitgen, H.O., Jurgens, H. and Saupe, D., Eds., *Chaos and Fractals*, Springer Verlag, 922-953.

[21] Lopes, R. and Betrouni, N. (2009) Fractal and Multifractal Analysis: A Review. *Medical Image Analysis*, **13**, 634-649. https://doi.org/10.1016/j.media.2009.05.003

[22] Milosevic, N.T., Di Ieva, A., Jelinek, H. and Rajkovic, N. (2017) Box-Counting Method in Quantitative Analysis of Images of the Brain. 2017 21*st International Conference on Control Systems and Computer Science* (*CSCS*), Bucharest, 29-31 May 2017, 343-349. https://doi.org/10.1109/cscs.2017.53