

基于“一题多解”思想利弊的策略性研究 ——以数列为例

王晓改

新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2025年4月17日; 录用日期: 2025年5月22日; 发布日期: 2025年5月29日

摘 要

在“双减”政策背景下, 数学教育正从“题海战术”向“思维培养”转型, 而“一题多解”思想通过多角度分析问题, 可有效提升学生的发散思维, 有助于建立知识点之间的内在联系, 实现可视化, 但在其实施过程中也存在认知超载风险、教学效率低等潜在弊端。文章以数列为例展开论述, 通过两个例题展示, 提出相应的教学策略和建议, 促进学生数学素养的全面发展。

关键词

一题多解, 数列, 数学素养

Strategic Research Based on the Pros and Cons of the Idea of “One Problem with Multiple Solutions”

—Taking a Series as an Example

Xiaogai Wang

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Apr. 17th, 2025; accepted: May 22nd, 2025; published: May 29th, 2025

Abstract

Under the background of the “double reduction” policy, mathematics education is transforming from “sea of questions tactics” to “thinking training”, and the idea of “one problem with multiple solutions” can effectively improve students’ divergent thinking through multi-angle analysis of

problems, help to establish the internal connection between knowledge points, and achieve visualization, but there are also potential drawbacks such as cognitive overload risk and low teaching efficiency in the implementation process. This paper takes the series as an example, and puts forward corresponding teaching strategies and suggestions through two example problems to promote the all-round development of students' mathematical literacy.

Keywords

One Problem with Multiple Solutions, Series, Mathematical Literacy

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 问题提出

在解题的过程中,如果想要寻求多种解法的话,在时间上会不会存在着一定的浪费,有些同学不禁会有这样的疑问,一题多解的思想真的有必要吗?答案自然是肯定的,但是真的百利无一害吗?脑科学研究表明,一道题多种解答方法对学生发展的作用要大于一种方法做多道题[1]。它可以提高问题解决的能力,避免在练习和考试中只因掌握一种方法而“卡壳”,通过对比计算量得出最优解法,节约书写复杂步骤的时间,最重要的是,应试考试教会的是不是机械记忆,而是培养逻辑思维和创新能力。一题多解思想能够让学生成为问题的解决者,在考场上减少其反应时间,增加正确率,它的本质是通过冗余训练实现降维打击。

2. 试题展现

一题多解的基本思路是对知识的综合应用,最常见的应用是知识转化,通过对旧知识的迁移应用,发现和理解新的数学规律。本文将通过两个关于数列的题目通过多种解法表明一题多解思想的好处,一个数列的知识点既可以用中学知识解答,也可以用大学知识解答,当接收的知识越来越多时,掌握的方法自然也会越来越多,逻辑思维能力也会越来越强。

例 1: 已知数列 $\{a_n\}$ 满足初始条件:

$a_1=1, a_2=3, a_3=7, a_4=15, a_5=31$, 求其通项公式

(该数列的递推特性隐含指数增长规律,但未直接给出递推式,需通过观察或数学工具推导)。

1) 观察归纳法

通过观察已知项,我们发现规律 1, 3, 7, 15, 31, 每项均为 2 的幂减 1, 即:

$$a_1 = 2^1 - 1 = 1,$$

$$a_2 = 2^2 - 1 = 3.$$

.....

由有限项到无限项推测通项公式为

$$a_n = 2^n - 1.$$

为了证明猜想是否正确,我们利用数学归纳法进行验证,当 $n=1$ 时成立,假设 $n=k$ 时成立,即 $a_k = 2^k - 1$, 根据递推关系 $a_{n+1} = 2a_n + 1$ (隐含于通项公式), 可得 $a_{k+1} = 2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1$, 假设成立。

归纳法离不开观察，观察是发现规律的窗口，是解决问题的先导，比较是归纳的前提。法一通过观察归纳，从特殊到一般得到了数列的通项公式，记忆压力不大，适合基础薄弱的学生掌握。

2) 递推方程法

通过相邻项关系分析，进行递推关系构建

$$a_2 - 2a_1 = 3 - 2 \times 1 = 1,$$

$$a_3 - 2a_2 = 7 - 2 \times 3 = 1,$$

得递推关系式

$$a_{n+1} = 2a_n + 1.$$

线性非齐次递推方程求解

齐次解：特征方程为 $r = 2$ ，通解为 $a_n^{(h)} = C \cdot 2^n$

特解：假设常数解 $a_n^{(p)} = A$ ，代入方程得 $A = -1$

通项公式： $a_n = C \cdot 2^n - 1$ ，利用 $a_1 = 1$ 求得 $C = 1$ ，即 $a_n = 2^n - 1$ 。

3) 差分分析法

一阶差分计算 $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ ，得差分序列：2, 4, 8, 16 该序列为等比数列，公比 $r = 2$ ，首项 $\Delta a_1 = 2$ 逆推通项公式

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \Delta a_k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \\ &= 1 + 2(2^{n-1} - 1) \\ &= 2^n - 1. \end{aligned}$$

4) 生成函数法

生成函数定义：设

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n,$$

根据递推式

$$a_{n+1} = 2a_n + 1,$$

建立方程：

$$G(x) - a_1 x = 2xG(x) + \frac{x}{1-x},$$

化简得

$$G(x) = \frac{x}{[(1-2x)(1-x)]},$$

通过部分分式分解：

$$G(x) = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x},$$

展开为幂级数得：

$$a_n = 2^n - 1.$$

比较以上四种解法，前两种方法适合基础知识薄弱的学生，这些学生在理解简单解法较为容易，掌

握过多解法会增加其学习负担, 导致认知负荷; 后两种解法需要一定的知识量储备以及较强的逻辑性, 能够很好的将数列的知识点融合贯通, 具有一定的挑战性, 这些方法则需要基础较好的学生自行去研究。

例 2: 已知数列 $\{a_n\}$ 满足递推关系:

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 3} (a_1 = 1),$$

求通项公式。

1) 代数变形法

变量替换: 令 $b_n = \frac{1}{a_n}$, 得

$$b_{n+1} = \frac{a_n + 3}{2a_n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{a_n} \right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} b_n,$$

移项

$$b_{n+1} - \frac{3}{2} b_n = \frac{1}{2},$$

设非齐次方程的特解为常数 $b_n = k$, 代入得

$$k = \frac{3}{2}k + \frac{1}{2} \Rightarrow k - \frac{3}{2}k = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}k = \frac{1}{2} \Rightarrow k = -1,$$

齐次方程 $b_{n+1} - \frac{3}{2}b_n = 0$ 的通解为

$$b_n^{(h)} = C \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1},$$

齐次解 + 特解得通解,

$$b_n = C \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} - 1.$$

利用初始条件 $a_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1$ 得

$$1 = C \left(\frac{3}{2} \right)^0 - 1 \Rightarrow C = 2,$$

代入得通项

$$b_n = 2 \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} - 1 \Rightarrow a_n = \frac{1}{2 \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} - 1},$$

化简得

$$a_n = \frac{1}{1 + \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1}}.$$

该方法可以训练学生基本变形技巧, 掌握最基础的解法, 适合基础知识薄弱的学生。

2) 不动点理论

解方程

$$x = \frac{2x}{x+3}$$

$$x(x+3)=2x \Rightarrow x^2+3x=2x \Rightarrow x^2+x=0 \Rightarrow x(x+1)=1 \Rightarrow x=0 \text{ 或 } x=-1.$$

下面计算导数

$$f(x)=\frac{2x}{x+3},$$

则

$$f'(x)=\frac{6}{(x+3)^2}.$$

在不动点处

$$\begin{cases} x=0 \text{ 时}, |f'(0)|=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}<1 \text{ (稳定)} \\ x=-1 \text{ 时}, |f'(-1)|=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}>1 \text{ (不稳定)} \end{cases},$$

因此, 数列收敛于稳定点 $x=0$ 。

以稳定点 $x=0$ 为中心, 令

$$d_n=a_n-0=a_n,$$

则递推式保持原形式

$$d_{n+1}=\frac{2d_n}{d_n+3},$$

进而通过代数变形可得通项

$$d_n=a_n=\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}+1}.$$

该方法衔接动力系统概念, 存在一定的难度, 掌握起来较为困难, 需要一定的逻辑表达。

3) 矩阵表示法

将分式递推转换为线性形式, 设 $a_n=\frac{p_n}{q_n}$, 代入原式得

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\frac{\frac{2 \cdot p_n}{q_n}}{\frac{p_n}{q_n}+3}=\frac{2 p_n}{p_n+3 q_n},$$

选择 $p_{n+1}=2 p_n$, $q_{n+1}=p_n+3 q_n$, 得到线性递推系统

$$\begin{cases} p_{n+1}=2 p_n \\ q_{n+1}=p_n+3 q_n \end{cases},$$

通过矩阵形式表示为

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix},$$

因此, 矩阵的特征值为

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}=(2-\lambda)(3-\lambda)=0 \Rightarrow \lambda_1=2, \lambda_2=3,$$

找到特征向量之后, 构造可逆矩阵 P

对 $\lambda_1 = 2$, 解 $(A - 2I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 则

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

对 $\lambda_2 = 3$, 解 $(A - 3I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 则

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow -v_1 = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

因此, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

求解通项

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix},$$

初始值 $a_1 = 1 = \frac{p_1}{q_1}$, 取 $p_1 = 1$, $q_1 = 1$ 则

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} P^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

计算得 $p_n = 2^{n-1}$, $q_n = 3^{n-1} + 2^{n-1}$,

因此

$$a_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{2^{n-1}}{3^{n-1} + 2^{n-1}} = \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + 1}.$$

该方法是大学知识, 揭示了线性代数的威力, 在中学时代不需掌握, 适合拔高的学生理解。

4) 双曲映射法

在坐标系中画出 $f(x) = \frac{2x}{x+3}$ 和 $y = x$, 当 $x \rightarrow \infty$, $f(x) \rightarrow 2$, 垂直渐近线 $x = -3$, 解 $f(x) = x$ 得不动点 $x = 0$ 和 $x = -1$ 。从初始点 $(a_1, 0) = (1, 0)$ 垂直移动到 $f(x)$ 曲线得 $(1, f(1)) = (1, 0.5)$, 水平投影到 $y = x$ 得 $(0.5, 0.5)$, 再垂直移动到 $f(x)$ 得 $(0.5, f(0.5)) = (0.5, 0.4)$, 形成蛛网图, 观察点列轨迹, 设双曲线方程为 $xy + ax + by + c = 0$, 代入前几项 $(1, 0.5)$ 、 $(0.5, 0.4)$ 等, 解得 $a = -2$, $b = 3$, $c = 0$, 即

$$xy - 2x + 3y = 0 \Rightarrow y = \frac{2x}{x+3},$$

用参数 t 表示, 令 $x = \frac{6}{3 + e^{kt}}$, 通过拟合得 $k = \ln \frac{3}{2}$, 最终通项与代数解一致。

该方法强化了空间知觉, 有一定的理解困难, 但计算过程较为简略, 可以掌握, 正所谓“递推数列”题目难, 归纳猜想做在前, 辅助数列求严谨, 蛛网图下显真颜[2]。

5) 利用微积分求解

利用导数判断稳定性

$$f(x) = \frac{2x}{x+3}, \quad f'(x) = \frac{6}{(x+3)^2}$$

在不动点 $x=0$ 时,

$$|f'(0)| = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} < 1 (\text{稳定}),$$

在不动点 $x=-1$ 时,

$$|f'(-1)| = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} > 1 (\text{不稳定}),$$

因此, 迭代收敛到 $x=0$ 。

设 $\epsilon_n = |a_n - 0|$, 则 $\epsilon_{n+1} \approx |f'(0)|\epsilon_n = \frac{2}{3}\epsilon_n$, 表明误差是按照指数率 $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 衰减, 经过一系列计算也可得到通项公式。

该方法提供了收敛性理论保证, 理解指数衰减的数学本质, 如果掌握了极限的中心思想, 就会变得通俗易懂。

6) 计算机代码

该方法不再展开赘述, 中学学生无法通过计算机进行作答。

3. 一题多解思想滥用存在的弊端

通过两个数列的例子可以看出, 很多方法在中学时期没有涉猎, 过多讲解则会造成学生的负担, 导致学生不知道该使用哪种方法来解决, 违背了讲解一题多解思想的初衷。在数学教学中, 一题多解思想不应该成为教师“炫技”的一种表现, 若不加以妥善应对, 可能会对教学效果产生负面影响, 现列举出以下几点讲述可能存在的弊端:

1) 增加学生负担

从认知超载风险的角度来看, 学习者的认知能力是有限的, 一题多解思想往往会使学生花费大量时间和精力去掌握多种方法, 可能导致学生对知识的理解浮于表面, 即使在授课的时候教师倡导多思考多发散思维, 但是方法过多, 就无法深入掌握核心知识点, 还会加重其学习负担。根据认知负荷理论(CLT), 数列的知识材料本身的难度会让学生产生较高的内在认知负荷[3], 如果教师在教学过程中不注重学生学习数列知识时的教学方式、师生互动、学习材料及呈现方式这些因素, 就会无形中增加学生学习数列的障碍困难, 产生较重的外在认知负荷, 这种过高的认知负荷会导致学生注意力分散, 难以有效吸收和理解知识, 当对同一数列问题提供超过三种解法后, 正确率会有所下降, 这反映出认知超载对学生学习效果是有负面影响的, 所以需要教师在数列教学中根据相关认知负荷的影响因素来针对性的提出教学策略来提高学生的相关认知负荷。

2) 混淆解题思路

学生没有扎实的基础知识和较强的归纳总结能力, 会因掌握众多解法中感到困惑, 甚至混淆不同解法的适用条件, 导致解题时频频出错。只有当学生拥有坚实的基础知识时, 他们才能在面对综合性问题时灵活运用所学, 高效解决问题[4]。因为缺乏坚实的基础知识会使学生在面对多种解法时难以理解每种方法的核心原理和步骤, 无法清晰地区分这些方法在逻辑上的差异, 也无法把握各自的关键点, 而归纳总结能力是将所学知识进行整理、提炼, 形成知识体系, 没有这种能力, 学生无法将不同的解法有效地整合起来。在学习多种解法后, 他们无法总结出每种方法的适用场景、优缺点以及相互之间的联系, 导致在实际解题时无法迅速、准确地选择合适的方法。例如, 在面对上面数列问题时, 学生可能记住了递推法、差分法和生成函数法的具体步骤, 但由于没有对这些方法进行归纳总结, 他们无法判断哪种方法在此时更为简便有效, 从而在解题过程中犹豫不决, 甚至随意套用解法, 造成错误, 这种对不同解法适

用条件的混淆,直接导致了学生在解题时的错误,逐渐削弱学生对数学学习的兴趣和积极性,使他们对数学产生畏难情绪,进而影响其数学素养的提升。

3) 时间成本投入太大

在常规课堂中,时间是有限的,如果对单题投入过多时间进行多解法拓展,可能会导致核心知识点的讲解被压缩,如果在教学中不考虑学生的实际情况和教学目标,一味地强调一题多解,可能会使课堂节奏拖沓,重点不突出,影响教学进度和学生的学习效率,从应试局限性的角度来看,一题多解思想在标准化考试中也并非万能,在高考等标准化考试中,时间是极其宝贵的,而一些复杂的解法可能会耗费大量时间且容易因步骤繁琐而失分。

4. 教师有效实施一题多解思想的教学策略

1) 分层次教学

分层次教学可以从“因材施教”进一步发展为“精准滴灌”。现利用数列问题构建一个三个层级的教学框架:基础层的目标是确保所有学生都能掌握递推法和数学归纳法,通过脚手架教学分解步骤,提供分布练习卡和模版填空记忆步骤,使用在线平台分层练习,自动批改基础题,使学生逐步掌握解题技巧;进阶层的目标是引导部分学生理解差分法,进行方法对比,通过可视化和情景化教学,例如设计一个增长模型,帮助学生直观地理解这些方法;拓展层的目标是激发尖子生探索生成函数等高阶方法,利用任务发布的游戏方式进行学习,这种分层次教学策略能够满足不同层次学生的学习需求,使每个学生都能在适合自己的水平上得到充分的发展,也保证了核心知识点的深入讲解,为学生提供了进一步拓展的空间。

2) 模型化与变式训练融合

基于最近发展区的理论,教师要将学生已掌握的知识 and 新的变量融合起来,让其进入深度学习状态[5]。深度教学和深度学习是相辅相成的,教师的深度教学可以将学生的学习引向深入,学生的深度学习可以推动教师的教学向深度发展[6]。通过“母题改编”实现解法迁移,将原题改为参数化形式,合理使用计算机生成 Excel 生成参数化题目,学生探究参数变化对通项的影响;或者进行逆向化改编,例如,已知递推式 $a_n = 2a_{n-1} + 3$,经过改编,已知 $a_n = 2^{n+1} + 3$,反推可能的表达式;还可以进行综合化改编,将数列与函数结合,与积分结合,讨论离散与连续的数学思想,分析其中的异同点。这些变式训练能够帮助学生更好地理解 and 掌握解题方法,真正掌握隐含的逻辑关系,提高他们的思维灵活性和创新能力,也尊重了学生的发展规律。

3) 情境化教学

情境化教学的真实性嵌入也为一题多解思想的实施提供了新的思路。设计项目式学习(PBL)案例,将数学问题与实际情境相结合,让学生在解决实际问题的过程中掌握多种解法,例如某家庭贷款 100 万元,年利率 5%,分十年等额还款,每月需还多少?可以通过递推法建立递推式,通过差分方程转化为线性差分方程求解,生成函数法推导,以小组为单位,提交一份报告,内容包含计算过程,不同解法以及还款建议。这种教学方法不仅能够激发学生的学习兴趣,还能帮助他们更好地理解数学知识的实际应用价值,培养他们的综合素养。

4) 多进行自主探索和创新

鼓励学生在学习过程中积极思考,敢于试错,尝试寻找不同于教材或教师讲解的解法,培养创新思维,不局限于现有的解法,敢于提出新的思路和方法,多向自身问问题,因为问题是数学的心脏,“一题多解”的教学同样离不开问题的引领,课堂上,教师可有意识地创设丰富的问题引发学生思考[7],比如设计阶梯式引导问题链:“能否用图形直观表达数列规律?”“若题目条件改变,哪种解法更通用?这

些解法有什么共性？更喜欢哪一种？哪一种更能够快速掌握？”什么情况下使用什么方法的选择等等，将不同解法之间的联系和转换关系进行梳理，形成一个完整的知识网络，定期将所学的解法进行总结和归纳，整理出每种解法的适用条件、优缺点和尝试失败的方法等，分析原因并修正。

5) 教师的教学技能

教师需要将 PCK (学科教学知识)深度整合，科学化运用一题多解思想，准确把握学生的学习情况，根据教学目标、学生的认知水平和教学内容的特点，精心设计一题多解的教学环节，选择合适的题目，合理引导学生从不同的角度思考问题，要站在学生的角度思考，逐步探索多种解法，设计有效的练习和反馈环节，让学生在实践中巩固所学的解法，提高解题能力，根据学生的反馈及时调整教学方法，让学生以思维导图的方式列举出相关公式以及知识点，例如分析差分法案例，观看递推法相关动画，阅读生成函数论文的摘要，创建“解法角”，让学生将自己困惑的地方写于此，次日教师集中答疑。

6) 合理使用现代化教具

随着人工智能的兴起，教师可以在课堂中合理使用 AR 和 VR，以此使学生能够身临其境，特别是在讲解空间几何时，使用人工智能，通过 3D 动画，则让学生更好的观察其位置关系，而不是在课本上的死记硬背，利用 GeoGebra 等数学软件绘制函数和数列的图像，例如在讲递推数列的“链条式”增长过程，学生佩戴 VR 眼镜，手动“拉动”项数观察其变化，学生还可以拍照上传错题在小程序里，AI 自动识别错误类型并将相同类型着重练习。在 GeoGebra 软件的支持下，基于认知负荷理论的教学方法会在课堂中显示出适应性[8]。

5. 一题多解思想在数列中的实验设计

为了验证提出的关于一题多解教学策略在数列教学中的有效性，科学评估学生的学习效果，可设计以下实验与评估方案：

5.1. 实验设计

1. 研究目标

关于上述提出的六点建议是否能显著提升学生对数列知识的理解深度、问题解决能力和发散思维能力，检验与传统单一解法教学比较中一题多解思想是否更有效。

2. 研究对象

可选择同一年级、数学基础相近的两个平行班级，设计实验组和对照组，每组 30 人，确保统计效力，通过做一些数列基础知识测试验证两组初始水平无显著差异。

3. 实验流程

两组均完成数列基础知识测试，确保基线一致，除此之外，教学内容、课时、作业量也保持一致，由同一教师授课以减少干扰，在教学结束后 1 周内进行效果评估，减少知识覆盖，现控制变量：

实验组：采用上述提出的教学策略进行讲授一题多解思想，例如，在讲解等差数列求和时，教师需展示公式法、几何图形法、数学归纳法等多种解法，并引导学生自主探索新解法。

对照组：采用传统教学法讲授一题多解思想，不设计任何教学手段。

5.2. 学习效果评估

本研究通过定量与定性混合评估六种教学策略可实施性，在定量评估中，利用标准化测试工具(含如“已知 $\{a_n\}$ 为等差数列， $a_1=1$ ， $d=3$ ，求 S_8 ”等类似的基础题和综合题)，设置任务(如“使用公式法、图形法、递归法三种方法证明等差数列求和公式”)，采用独立样本 t 检验分析实验组与对照组成绩差异，按照显著性水平($p < 0.05$)来验证策略有效性。定性评估方面，利用李克特五级量表设计一些问卷调查学

生对数学学习的情感态度、自我效能感和认知负荷，并随机抽取实验组 8 名学生进行深度访谈，收集学生作业中的多解法记录与错题本，利用内容分析法统计典型的思维模式，利用现代化工具，通过情景化教学等等，将所有数据采集安排在教学干预一周内完成，降低时间因素的干扰，通过以下题目(可随时补充)，可以得到一个大概的数据，可以利用此数据来判断是否具有有效性。

问卷题目：

1. “我认为探索多种解法能帮我更好地理解数学概念。” (1 = 非常不同意, 5 = 非常同意)
2. “在解决数列问题时，我会主动尝试不同解法。” (1 = 从不, 5 = 总是)
3. “我能清晰解释不同解法之间的联系与差异。” (1 = 非常不同意, 5 = 非常同意)
4. “当遇到难题时，我会尝试从不同角度拆解问题。” (1 = 从不, 5 = 总是)
5. “我能根据题目特点选择最合适的解法。” (1 = 非常困难, 5 = 非常容易)
6. “学习多种解法让我对数学问题更感兴趣。” (1 = 非常不同意, 5 = 非常同意)
7. “当发现新解法时，我感到有成就感。” (1 = 从不, 5 = 总是)
8. “与传统教学相比，一题多解课堂让我更愿意主动思考。” (1 = 非常不同意, 5 = 非常同意)
9. “我会将一题多解的思维方式应用到其他学科(如物理、编程)中。” (1 = 从不, 5 = 总是)
10. “在考试中，我会优先尝试自己最熟悉的解法，而非探索新方法。” (1 = 非常同意, 5 = 非常不同意)
11. “我能通过比较不同解法，总结解题的通用规律。” (1 = 非常困难, 5 = 非常容易)
12. “小组讨论中，同学的不同解法能启发我的思路。” (1 = 非常不同意, 5 = 非常同意)
13. “学习多种解法增加了我的课堂负担。” (1 = 非常同意, 5 = 非常不同意)
14. 请举例说明：哪种数列问题的多解法让你印象最深？它如何帮助你理解问题本质？
15. 如果让你改进一题多解教学，你希望教师增加哪些支持？

5.3. 实验控制

采取学生和教师均不被告知实验目的，仅告知使用不同教学方式，避免课外补习干扰，要求学生在实验期间不额外学习数列内容，统一教材、教学进度及作业难度，在实验 1 个月进行延迟后测，检验知识遗忘程度。

5.4. 数据分析

若实验组在后测结果中显著优于对照组(如成绩提高 20%以上，发散思维得分更高)，比如表现出更高的学习兴趣、更积极的解题策略(如主动尝试多解法)，可得出教学策略的有效性，但是对于这些数据仍存在一定的局限性，如样本规模较小、实验周期较短等，因此需继续提出改进方向(如跨校合作延长周期)。

5.5. 预期成果

验证六种关于一题多解思想的教学策略在提升知识掌握、思维灵活性上的优势，为数学教学改革提供实证依据，推动课堂深度学习，尊重学生的需求，现根据严谨的实验设计与多维评估，科学验证六种教学策略实施的有效性，并为教学实践提供可靠指导。

6. 总结

在教学中一题多解思想使用广泛，它的好处也有很多，但教师要注重合理运用，确定一题多解的适用性需要综合考虑学生、题目、教学目标、教学资源、教师能力以及学生需求等多个因素。只有在这些因素都适宜的情况下，一题多解才能发挥其最大的教育价值，帮助学生更好地学习数学，教师要帮助学

生从“想不到”跨越到“想得到”，这需要在策略性数学思想方法上找到解决问题的切入口，教师应有意识地引导学生自主归纳形成自身的思想方法库[9]，这启示我们在解题教学中，对同一问题可以多角度审视，引发联想，从而发现不同的解法，为此需要通过精细化的教学设计、科学化的学生认知规律把握和多元化的教学评价体系构建，可以使多解思维真正成为学生数学核心素养的生长点，为学生的未来发展奠定坚实的基础。

参考文献

- [1] 曹鹏. 数学一题多解应突出核心素养的培养[C]//新课程研究杂志社. 新课改教育理论探究论文集(二十一). 2022: 54-55.
- [2] 侯斯焜, 梁恕诚, 王桢宇. 递推数列中的直观想象与数学运算[J]. 中学数学, 2025(1): 4-6+14.
- [3] 赵萌. 高中生学习数列认知负荷情况的调查与实践研究[D]: [硕士学位论文]. 西宁: 青海师范大学, 2020.
- [4] 安慧娇. 知识、方法、思想深度融合下的高中数学单元复习——以“等差数列”的复习为例[J]. 数学教学通讯, 2025(3): 14-16.
- [5] 马贵生. 巧用一题多解锻炼学生数学思维[J]. 成才之路, 2022(5): 117-119.
- [6] 段广猛. 由一道经典“母题”引发的若干思考——谈数学中无处不在的“转化” [J]. 中国数学教育, 2024(15): 58-62+64.
- [7] 王雁. 聚焦“一题多解”发展核心素养[J]. 数学教学通讯, 2024(12): 66-68.
- [8] 舒星, 陈逢林. GeoGebra 环境下基于认知负荷理论的立体几何教学实践——以“基本立体图形”教学为例[J]. 数学教学通讯, 2024(36): 3-7.
- [9] 蔡映霞. 三类数学思想方法在一题多解教学的综合应用[J]. 中学数学研究(华南师范大学版), 2025(4): 15-17.