

基于概念性变式的教学设计

——以“等比数列”为例

蒋欣茹, 侯传燕*

新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2025年6月3日; 录用日期: 2025年7月1日; 发布日期: 2025年7月8日

摘 要

变式教学是教师在教学过程中常用的教学方法, 可以培养学生的数学思维, 在数学教学中一直扮演着“催化剂”的角色。等比数列是高中生在学习过程中接触的新知识, 从概念性变式教学出发, 对等比数列的概念提供更多的理解, 给学生提供循序渐进的认知过程, 帮助学生更好地融合新旧知识。

关键词

等比数列, 概念性变式, 变式教学

Teaching Design Based on Conceptual Variation

—Taking the “Proportional Sequences” as an Example

Xinru Jiang, Chuanyan Hou*

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Jun. 3rd, 2025; accepted: Jul. 1st, 2025; published: Jul. 8th, 2025

Abstract

Variable teaching is a commonly used teaching method by teachers in the teaching process, which can cultivate students' mathematical thinking and play a catalytic role in mathematics teaching. Proportional sequences are new knowledge that high school students come into contact with during the learning process. Starting from the teaching of conceptual variations, we provide more understanding of the concept of proportional sequences, offer students a progressive cognitive process,

*通讯作者。

文章引用: 蒋欣茹, 侯传燕. 基于概念性变式的教学设计[J]. 职业教育发展, 2025, 14(7): 127-133.
DOI: 10.12677/ve.2025.147309

and help them better integrate new and old knowledge.

Keywords

Proportional Sequences, Conceptual Variation, Variable Teaching

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

有关调查显示,无论是奥林匹克竞赛还是国际数学教育成就调查,中亚国家学生的数学成绩与西方学生的成绩相比,具有明显的优势。但有研究者发现,中国学习者在学习数学的方式上存在许多不足,特别是中小学学生,在学习知识的过程中,属于“被动接受”。曾有研究指出,在美国与中国的数学课堂中,存在明显的不同。美国学生在课堂中经常是用同一种方法解决不同的问题,而中国学生则是对同一问题采用不同的解决方法[1]。在数学的教学过程中,我们不仅要传授知识,还需要提升学生的思维水平。通过变式教学,不仅可以帮助学生掌握知识,同时还可以加深学生对数学的理解,有利于提高学生的思维水平,引起学生的好奇心,让学生学会积极主动地思考,进而提高课堂教学的效率[2]。

变式教学是教师在教学过程中常用的教学方法,可以培养学生运用数学方法的灵活性[3]。在长期的数学教学实践中,也证明了“唯‘变’不变”的真理。变式教学在数学教学中一直扮演着“催化剂”的角色,随着课改的进行,变式教学也必将为其提供强大的动力[4]。顾泠沅对变式教学进行了研究,并将变式教学分为两种,一种是概念性变式,另一种是过程性变式。其中概念性变式是对已经形成的概念提供更多方面的理解,帮助学生将新知识与原有的知识更好地融合;而过程性变式是为概念的建构提供一个有层次,且循序渐进的过程[1]。

等比数列是高中生在学习过程中接触的新的概念,《高中数学课程标准 2017 年版 2020 年修订》要求要能够通过日常生活和数学中的实例,理解等比数列的概念和通项公式的意义。同时,在具体的问题情境中发现数列中的等比关系,并能够解决相应的问题。最终,能够感悟到数列是用来刻画现实世界中一类具有递推规律事物的数学模型[5]。新事物的概念是学生认识新事物的第一步,如果想让学生对概念有正确的理解,那学生与概念的“初次见面”就显得非常重要。下面以等比数列的新授课为例,展示在教学过程中进行的概念性变式教学的部分环节。

2. 创设情景, 分析特征

新授课往往是从学生现有的知识背景和生活背景出发,向学生展示与本节有关的内容,这是我们进行概念性变式教学的出发点。教师可以通过列举在学生学习和生活过程中常见的例子,进行概念引入。但在这个过程中,我们要注意,我们所列举的这些例子,需要尽可能地帮助学生理解所要学习的新概念的本质。

师:请同学们观察下面的例子,并说一说你有什么发现?

① 有丝分裂。一个细胞进行有丝分裂,每分裂一次个数就加倍。一个细胞从第一次有丝分裂开始,每次分裂产生的细胞数为: 2, 4, 8, 16, 32, …

② 生活中的电子设备的存储容量: 4 GB, 8 GB, 16 GB, 32 GB, 64 GB, 128 GB, 256GB, 512 GB, 1024 GB

(1 TB)

③ 每位同学统一订购的课本数量: 9, 9, 9, 9, ..., 9。

④ 有一张正方形的纸, 先将它对折, 然后再对折, 然后再次对折...每次对折后所得到图形的面积是原来图形面积的 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

⑤ 一组常见的数列 $\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, -\frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \dots$

学生基于前面对等差数列的学习, 在这里会初步得到关于等比数列的“概念”。

师: 在这些例子中, 什么在发生变化? 什么又是不变的呢?

生: 它们的每一项都在发生变化, 但它们每一项与前一項的比并没有发生变化。

设计意图 首先, 给出的例子, 是在学生的日常生活中能够接触到的。第一个例子是学生在生物中所接触到的知识, 可以体现数学知识与其他学科知识之间的联系。第二个至第四个例子, 是源于我们的日常生活, 可以让学生体会到数学源于生活。而第五个例子是在做找规律的题目中最常见的一种题型, 是学生在日常学习中能够观察到的。其次, 教师的第二问是为了不让学生死记定义, 引导学生找到它们之间的关系。最后, 也在这里向学生间接地暗示等比数列中公比的取值范围是怎样的。其中前两个例子的公比大于 1, 第三个例子的公比等于 1, 第四个例子的公比小于 1, 最后一个例子的公比小于零。

在学生思考问题时, 教师要注意引导学生进行观察, 发现这些例子中哪些没有发生改变, 哪些是不断变化的, 发生变化的量之间有没有关系, 在学习中我们该如何来描述这些变量之间的关系。这些思考, 不论是在高中数学学习中, 还是在大学数学学习中以及在数学的应用中, 都是非常重要的。

在引导学生找到这些例子的规律后, 部分学生可能会根据前面所学的等差数列的定义, 由此发现这些例子中的等比数列。进而, 初步得到等比数列的概念: 从第二项起, 每一项与它前一项的比都等于同一常数, 但这个常数 q 显然不能为零。即当 $n \geq 2, n \in N^*$ 时, $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q, (q \neq 0)$ 。同时, 由等比数列的定义, 得到通项公式:

$$a_2 = a_1 q, a_3 = a_2 q = a_1 q^2, a_4 = a_3 q = a_1 q^3, \dots, a_n = a_1 q^{n-1}$$

教师除了要帮助学生理解概念的一般性, 同时也需要向学生展示概念的“变形”形式。这不仅可以加深学生对等比数列概念的理解, 同时也可以对等比数列有进一步的认识。

师: 在上面的例子中, 我们发现有些数列, 它的个数有无数个, 而对于有的数列, 例如第二个例子中的数列, 我们发现它的个数是有限个, 因为在我们所知道的一些电子设备的存储容量, 它不可能为无限大, 它总会有一个最大存储容量。对于一个有限的数列, 如果想要构成等比数列, 它应当满足什么条件?

生: 满足等比数列的定义。

师: 很好, 那现在我们就来看一个这样的有限数列: 3, 6, 12

师: 他们之间有什么关系呢?

生: 6 是 3 的两倍, 12 是 6 的两倍, 12 是 3 的 4 倍。

师: 没错, 但我们现在只得到了两个数之间的关系, 我们能否得到这三个数之间的关系?

学生经过思考后得出答案: 3×12 的结果为 6 的 6 倍。

师: 没错, 现在我们继续往后取一个数 3, 6, 12, 24, 它们又有怎样的关系? 还会是 6 倍的关系吗?

生: 6×24 的结果是 12 的 12 倍, 不是六倍。

师: 我们发现并不是 6 倍。我们不妨再多取这样的几个数, 看一看他们到底会有怎样的关系, 请同学们试一试。

经过学生实践, 学生发现了三个数成等比数列的规律, 教师可以继续引导, 由此得到关于等比数列中的等比中项有关的结论:

① 三个数成等比数列的充要条件:

a, G, b 成等比数列 $\Leftrightarrow \frac{G}{a} = \frac{b}{G} \Leftrightarrow G^2 = ab$ 。称 G 为 a, b 的等比中项。

② 等比数列 $\{a_n\}$ 中, 任意相邻三项也成等比数列:

$a_{n-1}, a_n, a_{n+1} (n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$ 成等比数列 $\Leftrightarrow a_n$ 为 a_{n-1}, a_{n+1} 的等比中项 $\Leftrightarrow a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \Leftrightarrow$ 由 n 的任意性, 数列 $\{a_n\}$ 成等比数列。

③ 等比数列 $\{a_n\}$ 中, 奇数项组成的数列 $a_1, a_3, \dots$ 成等比数列, 其公比为 q^2 ; 偶数项组成的数列 $a_2, a_4, \dots$ 成等比数列, 其公比为 q^2 ; 每隔相同的项组成的新数列 $a_m, a_{m+k}, a_{m+2k}, \dots (m, k \in \mathbb{N}^*)$ 也是等比数列, 其公比为 q^k 。

设计意图 通过数列的有限个数和无限个数, 先引导学生发现有限个数之间的关系, 先是每两项之间的关系, 然后是连续的三项之间的关系, 到最后是相隔相同的项组成的新数列之间的关系, 让学生理解等比数列中的“等比数列”之间的关系, 进而得到与等比中项的有关结论。而不是随意的给出等比中项的性质, 让学生死记硬背或通过刷题来巩固。学生运用通过自身探究得出的结论, 比运用通过死记硬背得到的结论会更加顺手。

学生知道概念的定义, 并不代表对概念有正确的认识。因此, 为了正确理解概念, 我们需要对概念从不同的角度进行理解。只有对概念有正确的理解, 我们才能真正认识这一概念, 在之后的运用过程中才不会出错。

3. 概念整合, 问题类化

在对等比数列的概念以及有关性质有了基本的了解之后, 下一步就是开始运用等比数列的概念及性质。

在讲授等比数列的概念后, 一般教师会给出几个有关等比数列的例题, 让学生判断是否为等比数列, 并指出首项与公比, 但这一类型的习题在学生进行上述过程中已经进行了练习, 接下来教师应让学生进行进一步的练习, 例如:

① 已知等比数列的前两项, 求该等比数列的任意一项。

② 已知等比数列的首项和某一项, 求该等比数列的任意一项。

③ 已知等比数列的公比和某一项, 求该等比数列的任意一项。

④ 已知等比数列中的任意两项, 求该等比数列的任意一项。

设计意图 在上述的变式中, 是学生利用等比数列进行的初步练习, 具有共同的性质: 给出两个独立的条件, 且根据这两个条件, 就可以求出等比数列的首项和公比, 进而可以求得该数列的通项公式, 最后求得数列中的任意一项。从而让学生发现: 只要知道 a_1, q, a_n 中的任意两个, 就可以求得剩下的。这些例题都是较为简单的习题, 这里就不再举例。

在上述练习中我们所给出的都是两个独立的条件, 为了让学生进一步地了解并运用等比数列我们需要进行进一步的变式。

① 已知等比数列的某一项和另外两项的和(差、积、商), 求数列的通项公式或某一项。

例 1 在正项等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_2 = 1, a_3 + a_4 = 6$, 求数列 $\{a_n\}$ 通项公式。

② 已知等比数列中两组两项的和(差、积、商), 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

例 2 已知正项等比数列 $\{a_n\}$, $a_2 \cdot a_4 = 16, a_4 + a_5 = 24$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式。

③ 利用等比中项进行求解。

例3 已知等比数列 $\{a_n\}$, $a_4 + a_7 = 2$, $a_4^2 + a_7^2 = 20$, 求 $a_1 a_{10}$ 的值为多少。

设计意图 这些例题都是在等比数列的通项公式的基础上进行训练。先是给出一项以及某两项的和(差、积、商), 之后是给出一组两项的和(差、积、商), 最后是利用等比中项进行求解。这些例题的难度是层层递进的, 所运用的知识的难度也越来越高。特别是在最后运用了等比中项等有关的知识, 若学生只是想求出首项和公比, 计算量可能会增大。因此在这个过程中, 教师需要对学生进行引导。这些例题与前面相比可能难度有所增加, 但还未与其他知识相结合, 凸显的依然是等比数列的概念本身。在此基础上, 学生应对等比数列有了较深刻的理解, 能够熟练运用其通项公式与等比中项进行做题。

4. 思维提升, 知识逆用

在上述练习中, 我们都是从等比数列出发, 求其通项公式或者某一项, 接下来我们可以尝试将其反过来, 进行另一种变式。

① 已知等比数列的通项公式, 求其首项和公比。

② 已知一个数列的通项公式是关于 n 的指数函数式, 判断该数列是不是等比数列。

例4 对于数列 $\{a_n\}$, 若点 (n, a_n) ($n \in \mathbb{N}^*$) 都在函数 $y = cq^x$ 的图像上, 其中 c, q 为常数, 且 $c \neq 0, q \neq 0, q \neq 1$, 试判断该数列是不是等比数列。

③ 已知一个数列的通项公式, 判断该数列是不是等比数列。

例5 已知 $n=1$ 时, $a_1 = 3+a$, 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$, 判断 $\{a_n\}$ 是否为等比数列?

④ 已知一个递推式, 判断是不是等比数列?

例6 已知数列 $\{a_n\}$, 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n + 2$ 。判断这个数列是否为等比数列?

设计意图 前两个变式都是从等比数列的通项公式出发, 进行逆向变式。第一个变式是对等比数列通项公式逆向运用的最简单的例子, 在前面练习的基础上, 学生可以通过计算得出结果。第二个变式是我们在日后做题中常见的一种题型, 通过给出的通项公式判断是否为等比数列。第三个和第四个例子也是从通项公式出发, 但给出了反例, 通过这些反例, 学生可以进行对比, 从而可以进一步加强学生对等比数列概念的理解。

前面的练习都是关于等比数列的定义以及通项公式的练习, 都是与等比数列自身有关的练习, 但还未与所学过的其他知识联系起来。为了让学生能够更好地建立起等比数列与其他知识的联系, 我们还需要继续进行进一步的变式训练。

例7 ① 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{2} = 5 \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{2} \right)$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

例8 ② 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 3}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

设计意图 第一个变式是让学生能够判断由数列 $\{a_n\}$ 生成的一个新的数列 $\left\{ \frac{1}{a_n} + \frac{1}{2} \right\}$, 考察整体思想, 只需要将它们看作一个整体, 就会发现这也是一个等比数列。而对于第二个变式, 学生在第一个变式的基础上可能也会考虑整体思想, 但在运用整体思想之前还需对它进行两次变形。首先, 将其变形为 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 3}{a_n} = 1 + \frac{3}{a_n}$, 之后在等式两边同时加 $\frac{1}{2}$, 之后可构造出一个新的等比数列 $\left\{ \frac{1}{a_n} + \frac{1}{2} \right\}$, 最后才能够求得数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。在构造的过程中, 教师需要对学生进行适当的引导。

整个的第三部分是为了提高学生的思维提出的, 这有利于学生更好地认识等比数列。同时也向学生展示出在数列习题中, 几种最常见的类型。这是概念的新授课, 在教师教学过程中, 若教师只是简单举几个例子, 之后匆忙给出定义, 最后做几道习题就结束新授课, 忽略题目之间的关联性, 这不利于学生形成有关等比数列的知识网, 会让学生认为数列是独立的一部分, 与学生之前所学的知识没有交集, 那学生很难将数列有关的知识与数学中的其他知识进行融合, 最后只能将数列孤立于其他数学知识之外。

在上述教学过程中, 从概念性变式的角度出发, 展现了等比数列的新授课概念性变式教学的基本过程(图 1)。通过列举日常生活中的例子引入等比数列的概念, 得到等比数列的通项公式。之后对等比中项进行探究, 并得到相关结论。最后在运用等比数列有关知识时, 展现了对等比数列的初步运用及逆向运用, 整个过程体现了由特殊到一般, 再到特殊的数学思想, 同时也对等比数列这一概念进行了多方面理解, 帮助学生掌握了它的本质特征, 并能够判断出某一数列是否为等比数列。

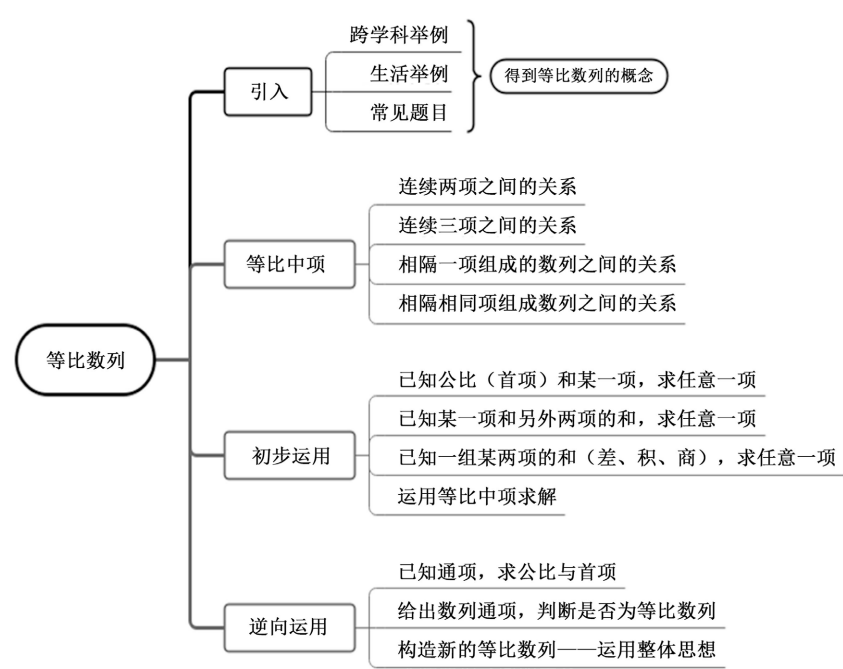


Figure 1. Basic process of teaching conceptual variations of arithmetic sequences
图 1. 等比数列概念性变式教学基本过程

变式教学是数学教学过程中常用的一种教学方法, 它的作用是在比较与辨别的过程中发现数学知识的变化与差异[6], 以不同的形式展示概念的本质属性, 帮助学生得到概念的内涵。无论是“变”还是“不变”, 都要让学生自己去经历, 而教师需要不断地引导与点拨, 让学生去思考和比较, 只有这样才能发现问题的本质[7]。在实施变式教学中, “变”不是目的, 只是一种手段。因此, 谁来变? 变什么? 怎样变? 教师可以事先进行预测, 但在实际课堂中是不可能完全按照预设进行的[8]。在这一过程中可以促进学生批判性思维的发展, 学生通过面对新的挑战, 从而学会如何去分析问题? 怎样去解决问题? 有助于他们在各个领域中的发展[9]。

基金项目

新疆维吾尔自治区一流本科课程(空间解析几何)建设项目; 新疆师范大学本科教学质量工程建设教学研究项目(SDJG2022-17); 新疆师范大学数学与应用数学专业基础课程群教学团队资助。

参考文献

- [1] 鲍建生, 黄荣金, 易凌峰, 等. 变式教学研究[J]. 数学教学, 2003(1): 11-12.
- [2] 杨利刚. 解题教学中“顺势变式、即时追问”的运用与思考[J]. 数学通报, 2022, 61(11): 47-50.
- [3] 崔志荣. 变式教学要多让学生“变”[J]. 数学通报, 2021, 60(1): 57-59.
- [4] 李健. 新课程背景下概率与统计的变式教学探析[J]. 数学通报, 2021, 60(12): 37-40.
- [5] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2021.
- [6] 陈碧芬. 运用变式教学引向高阶目标[J]. 数学通报, 2023, 62(6): 27-30.
- [7] 蔡旦利. 巧用“追问”与“变式”促进深度学习——以基本不等式应用为例[J]. 中学教研(数学), 2022(3): 29-32.
- [8] 林松. 以“变”促“思”因“思”生“变”——以一道“一箭穿心”模型的变式教学为例[J]. 中小学数学(初中版), 2024(Z1): 97-100.
- [9] 李忠良. 基于变式理论的习题设计[J]. 数学通报, 2024, 63(6): 33-38, 43.