College and Job 职业教育发展, 2025, 14(9), 10-17
Published Online September 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ve
https://doi.org/10.12677/ve.2025.149402

Hans汉斯

坐标变换在旋转体体积和侧面积计算中的应用

刘青青

华南理工大学数学学院，广东 广州

收稿日期：2025年7月23日；录用日期：2025年8月20日；发布日期：2025年8月28日

摘　要

旋转体的体积与侧面积计算是微积分的重要内容。本文从坐标变换的角度，重新推导了平面曲线绕不平行于坐标轴的倾斜直线旋转所得旋转体的体积和侧面积公式，为培养学生的数学思维和创新意识提供了新的教学案例。

关键词

坐标变换，旋转体体积，旋转体侧面积

The Application of Coordinate Transformation in the Calculations of the Volume and Surface Area of Rotational Solids

Qingqing Liu

School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong

Received: Jul. 23rd, 2025; accepted: Aug. 20th, 2025; published: Aug. 28th, 2025

Abstract

The calculation of the volume and lateral surface area of a solid of revolution is an important topic in calculus. This paper re-derives the formulas for the volume and lateral surface area for a solid which is obtained by rotating a plane curve around a slant line that is not parallel to the coordinate axes. These formulas are obtained from the perspective of coordinate transformation. This paper provides a new teaching case for cultivating students' mathematical thinking and innovative consciousness.

文章引用: 刘青青. 坐标变换在旋转体体积和侧面积计算中的应用[J]. 职业教育发展, 2025, 14(9): 10-17.
DOI: 10.12677/ve.2025.149402

Keywords

Coordinate Transformation, Volume of Rotational Solids, Surface Area of Rotational Solids

1. 引言

在微积分的知识体系中，旋转体的体积与侧面积计算不仅是连接几何直观与分析运算的重要纽带，更是解决工程测量、物理建模等实际问题的关键工具。从常见的圆柱、圆锥等基本旋转体，到复杂曲线绕轴旋转形成的不规则几何体，其度量计算始终是教学与研究的核心。

传统教学中，学生已熟练掌握平面曲线绕水平或垂直坐标轴旋转时的体积与侧面积计算方法。这些情形下，体积可通过圆盘法或柱壳法来推导，侧面积则借助圆柱面的近似得以计算。然而，当旋转轴为不平行于坐标轴的倾斜直线时，问题变得复杂很多。此时，曲线与旋转轴的相对位置关系不再具有对称性，微元的度量(如圆盘厚度、弧长微元的投影)需引入角度关系进行修正。

现有文献(参考[1]-[5])已尝试通过微元法推导倾斜轴旋转体的计算公式，但这些结果多依赖特定几何假设(如切线倾斜角与旋转轴夹角的特定关系)，且难以在一般情形下进行普适性验证。这种局限性不仅给学生的理解带来障碍，也制约了对“旋转体度量本质”的深层认知。

事实上，坐标变换作为几何中“化归思想”的典型载体，为解决此类复杂问题提供了新的思路：若能通过旋转变换等手段，将倾斜的旋转轴转化为新坐标系下平行于坐标轴的直线，便可将陌生问题转化为熟悉的形式。这种方法不仅能简化计算过程，更能揭示旋转体体积与侧面积的几何本质——其度量仅与曲线到旋转轴的距离、曲线的弧长等固有属性相关，而与坐标系的选取无关。

基于此，本文将系统探讨坐标变换(尤其是旋转变换)在倾斜轴旋转体计算中的应用，通过对比微元法与坐标变换法的推导过程，验证公式的一致性，并阐释其背后的数学思想，为微积分教学提供更具启发性的案例。

问题回顾：

设 C 为曲线 $y=f(x)$ 上介于点 $P(p,f(p))$ 和 $Q(q,f(q))$ 之间的弧段，且设 R 为由曲线 C，直线 $y=mx+b$ (该直线完全在 C 下方)以及从 P 和 Q 向该直线所作垂线所围成的区域。求区域 R 绕直线 $y=mx+b$ 旋转一周得到的旋转体的体积与侧面积。

关于这个问题，目前已经有很多文献，例如[4] [5]利用微元法给出了计算公式：

体积计算公式：$V=\dfrac{\pi}{(m^2+1)^{3/2}}\int_p^q (f(x)-mx-b)^2(1+mf'(x))dx.$

侧面积计算公式：$S=\dfrac{2\pi}{\sqrt{m^2+1}}\int_p^q |f(x)-mx-b|\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx.$

为了与后面的坐标变换进行对比，我们首先简要给出如何利用微元法得到上述两个公式的推导过程。

2. 微元法在旋转体体积和侧面积计算中的应用

首先说明旋转体体积公式的推导过程(为了后面三角函数的计算方便，我们只讨论 $m>0$ 的情况)。首先需要明确在体积计算问题中，每个小弧段绕旋转轴旋转后近似为一个圆盘，圆盘的半径由曲线上的点

到直线的距离给定，

$$d=\frac{\left|f\left(x\right)-mx-b\right|}{\sqrt{m^2+1}}. \tag{1.1}$$

因此问题的关键在于给出圆盘厚度，暂且记为 du，与自变量微元 dx 的关系。综合文献[1] [4] [5]的思路，圆盘厚度 du 与自变量微元 dx 的关系可以借助曲线在点 $\left(x,f\left(x\right)\right)$ 处的切线得到。我们用 α 表示切线的倾斜角，因此 $\tan\alpha=f'\left(x\right)$，用 α 表示斜线 $y=mx+b$ 的倾斜角，因此 $\tan\beta=m$，由此可知 $\beta-\alpha$ 为斜线 $y=mx+b$ 与曲线在点 $\left(x,f\left(x\right)\right)$ 处的切线的夹角。因此，

$$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}，\sin\beta=\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}.$$

通过几何关系可知，厚度 du 与自变量微元 dx 存在一定的比例关系，结合文献[1]在 552 页的图形，可得，

$$\frac{dx}{\cos\alpha}=\frac{du}{\cos\left(\beta-\alpha\right)},$$

因此，

$$\frac{du}{dx}=\frac{\cos\left(\beta-\alpha\right)}{\cos\alpha}=\cos\beta+\tan\alpha\sin\beta=\left[\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}+\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}f'\left(x\right)\right],$$

故有，

$$du=\left[\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}+\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}f'\left(x\right)\right]dx.$$

则可以得到旋转体的体积公式：

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_p^q\left(\frac{\left|f\left(x\right)-mx-b\right|}{\sqrt{m^2+1}}\right)^2\left[\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}+\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}f'\left(x\right)\right]dx\\&=\frac{\pi}{\left(m^2+1\right)^{3/2}}\int_p^q\left(f\left(x\right)-mx-b\right)^2\left(1+mf'\left(x\right)\right)dx.\end{aligned}$$

其次说明侧面积公式的推导过程。在侧面积计算问题中，每个小弧段绕旋转轴旋转后近似为一个圆柱片，圆柱片的半径即为曲线上一点到旋转轴的距离，这与推导旋转体体积公式时的圆盘半径(1.1)是一致的，圆柱片的高度用弧长微元来给：

$$ds=\sqrt{1+\left[f'\left(x\right)\right]^2}dx.$$

因此很容易得到侧面积的计算公式，

$$\begin{aligned}S&=2\pi\int_p^q\frac{\left|f\left(x\right)-mx-b\right|}{\sqrt{m^2+1}}ds\\&=\frac{2\pi}{\sqrt{m^2+1}}\int_p^q\left|f\left(x\right)-mx-b\right|\sqrt{1+\left[f'\left(x\right)\right]^2}dx.\end{aligned}$$

我们目前仅能针对特殊情形(例如 $m=0$)验证上述公式的正确性，而对于一般的斜直线，暂时还无法验证这两个公式的正确性。因此，我们从更具普遍性的几何本质出发，对这两个公式展开验证。

3. 坐标变换在旋转体体积与侧面积计算中的应用

(一) 教学目标与教学思路设计

教学目标：

1) 通过开展坐标变换在旋转体体积与侧面积计算中的应用教学，期望达成以下教学目标：

使学生理解坐标变换(特别是旋转变换)的基本原理，掌握将倾斜直线旋转轴转化为平行于坐标轴的坐标变换方法。让学生能够运用坐标变换法推导平面曲线绕倾斜直线旋转的旋转体的体积和侧面积计算公式，并能熟练应用公式解决实际问题。

2) 通过问题引导，培养学生发现问题、分析问题和解决问题的能力，让学生体会“化归”的数学思想在解决复杂问题中的应用。通过对比坐标变换法与微元法，培养学生的比较思维和批判思维，提高学生对不同数学方法的选择和应用能力。

3) 通过解决具有一定挑战性的问题，激发学生的学习兴趣和求知欲，培养学生勇于探索、敢于创新的精神。让学生在合作与交流中体会数学学习的乐趣，培养学生的团队协作意识。

教学思路的设计：

引导学生思考“面对倾斜直线 $y = mx + b$，直接计算旋转体的体积和表面积往往较为复杂。那么，我们能否通过某种方式，将倾斜的情况转化为大家熟悉的水平或垂直形式呢？”启发学生联想到坐标变换，如旋转坐标系，使倾斜直线在新坐标系中变为水平或垂直状态。接着进一步引导：“要确定坐标变换的公式，可从该直线的方向向量和法向量入手，思考如何引入合适的线性变换，让直线能够平行于坐标轴。”最后问，“是否所有将斜直线变成平行于坐标轴的线性变换都可以用？”引导学生想到无论哪种变换，必须保持旋转体的形状不变，由此联想到保持距离的正交变换，即旋转变换，再带领学生推导坐标变换的具体表达式，并且在每一步推导完成后追问：“经过这样的变换，原曲线、相关点的坐标会发生怎样的变化？原区域的边界在新坐标系中又会呈现出什么形态？”通过这样的方式逐步梳理，将陌生的斜向问题转化为已学过的水平或垂直旋转问题。下面详细介绍具体的应用步骤。下面详细介绍应用步骤。

(二) 坐标变换在体积与侧面积计算中的具体应用步骤

第一步：选择合适的坐标变换。针对旋转轴为倾斜直线的情况，通常选择旋转变换，将倾斜的旋转轴转换为与某一坐标轴平行的直线。具体来说，选取倾斜直线的方向向量 $(1,m)$ 以及它的法向量 $(-m,1)$ 并将它们标准化作为新的坐标系中的标准基：

$$i' = \left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}, \frac{m}{\sqrt{m^2+1}}\right), j' = \left(-\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}\right),$$

则这个线性变换可以写成：

$$\begin{pmatrix} i' \\ j' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m^2+1}} & \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} \\ -\frac{m}{\sqrt{m^2+1}} & \frac{1}{\sqrt{m^2+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \triangleq A \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}.$$

这里的 $i = (1,0), j = (0,1)$，则平面中任意一个向量 $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$，

$$\vec{a} = (x,y)\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = (x,y)A^{-1}\begin{pmatrix} i' \\ j' \end{pmatrix} \triangleq (x',y')\begin{pmatrix} i' \\ j' \end{pmatrix}.$$

因此新的坐标变量 (x',y') 与原来坐标变量 (x,y) 的关系为：$(x',y') = (x,y)A^{-1}$，

$$\left(x',y'\right)=\left(x,y\right)A^{-1}=\left(x,y\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{m^2+1}} & -\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}\\ \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} & \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}\end{pmatrix},$$

即，

$$\begin{cases}x'=\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}x+\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}y,\\ y'=-\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}x+\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}y,\end{cases}\tag{1.2}$$

或者，

$$\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}x'-\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}y',\\ y=\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}x'+\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}y'.\end{cases}\tag{1.3}$$

第二步：将旋转体相关元素转换到新坐标系，即写出旋转轴倾斜直线 $y=mx+b$ 与曲线 $y=f\left(x\right)$ 在新的坐标系下的表达式。

对于旋转轴，我们将关系式(1.3)代入方程 $y=mx+b$，即有：

$$\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}x'+\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}y'=m\left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}x'-\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}y'\right)+b.$$

化简后可以得到：

$$y'=\frac{b}{\sqrt{m^2+1}}.\tag{1.4}$$

因此新的旋转轴平行于新的坐标系中的 x' 轴。

对于曲线 $y=f\left(x\right)$，上述方法不再适用，原因是很难从下面的式子

$$\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}x'+\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}y'=f\left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}x'-\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}y'\right)$$

中得到一个显示表达(同学们可以用简单的例子，比如 $f\left(x\right)=\sqrt{x}$ 来验证)。那么，换个思路，问题本质是将曲线上的任意一点的坐标 $\left(x,f\left(x\right)\right)$ 用新坐标 $\left(x',y'\right)$ 来表示：

$$\begin{cases}x'=\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}x+\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}y=\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}x+\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}f\left(x\right),\\ y'=-\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}x+\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}y=-\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}x+\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}f\left(x\right).\end{cases}\tag{1.5}$$

因此，得到了该曲线的参数方程，参数的范围为 $p\le x\le q$。

第三步：利用新坐标系计算体积与表面积，推导过程如下：

在参数方程下计算旋转体的体积，其本质是运用变量替换计算定积分，我们首先给出 dx' 与 dx 的关系，再利用旋转轴为平行于坐标轴的直线时旋转体的体积公式，计算新坐标系下旋转体的体积。根据(1.5)的第一个式子，可得，

$$dx' = \left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} f'(x) \right) dx,$$

因此，

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{x_1'}^{x_2'} \left[y' - \frac{b}{\sqrt{m^2+1}} \right]^2 dx' \\ &= \pi \int_p^q \left[-\frac{m}{\sqrt{m^2+1}} x + \frac{1}{\sqrt{m^2+1}} f(x) - \frac{b}{\sqrt{m^2+1}} \right]^2 \left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} f'(x) \right) dx \\ &= \frac{\pi}{(m^2+1)^{3/2}} \int_p^q \left(f(x) - mx - b \right)^2 \left(1 + mf'(x) \right) dx. \end{aligned}$$

这里的 x_1'， x_2' 为新坐标系中横坐标的上下限。这个公式与用微元法得到的公式是一致的。

为了得到侧面积的计算公式，我们首先利用曲线的参数表达(1.5)计算弧长微元：

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{\left[\frac{1}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} f'(x) \right]^2 + \left[-\frac{m}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{m^2+1}} f'(x) \right]^2} dx \\ &= \sqrt{1 + \left(f'(x) \right)^2} dx. \end{aligned}$$

经过计算，我们发现，该弧长微元与在原来直角坐标系下的表达式是一致的。因此，侧面积为

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{x_1'}^{x_2'} \left| y' - \frac{b}{\sqrt{m^2+1}} \right| ds \\ &= 2\pi \int_p^q \left| -\frac{m}{\sqrt{m^2+1}} x + \frac{1}{\sqrt{m^2+1}} f(x) - \frac{b}{\sqrt{m^2+1}} \right| \sqrt{1 + \left[f'(x) \right]^2} dx \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{m^2+1}} \int_p^q \left| f(x) - mx - b \right| \sqrt{1 + \left[f'(x) \right]^2} dx. \end{aligned} \tag{1.6}$$

这里的 x_1'， x_2' 为新坐标系中横坐标的上下限。

通过坐标变换，绕倾斜直线旋转的问题转化为绕平行于坐标轴的直线旋转的问题，保留了几何本质，简化了运算，推导的公式与微元法一致，验证了其正确性。

(三) 问题的延伸

这种方法还可以计算区域 R 的面积。计算过程如下：

$$\begin{aligned} A &= \int_{x_1'}^{x_2'} \left[y' - \frac{b}{\sqrt{m^2+1}} \right] dx' \\ &= \int_p^q \left[-\frac{m}{\sqrt{m^2+1}} x + \frac{1}{\sqrt{m^2+1}} f(x) - \frac{b}{\sqrt{m^2+1}} \right] \left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} f'(x) \right) dx \\ &= \frac{1}{m^2+1} \int_p^q \left[f(x) - mx - b \right] \left(1 + mf'(x) \right) dx. \end{aligned}$$

这里的 x_1'， x_2' 为新坐标系中横坐标的上下限。这里的公式与文献[1]中的公式是一致的。

4. 结论与展望

(一) 微元法和坐标变换法在旋转体体积和侧面积计算中的对比

微元法和坐标变换法在旋转体体积和侧面积的计算中有以下三个方面的区别：在几何直观方面，坐标变换法通过将倾斜旋转轴转化为平行于坐标轴的直线，使旋转体的形状在新坐标系中更易于想象，学生能够直接利用已有的绕坐标轴旋转的知识进行理解，几何意义更加清晰；而微元法中，对于薄圆台、圆柱面部分的近似需要较强的空间想象能力，对于倾斜情况，角度等因素的引入增加了几何直观的难度。在概念简化方面，坐标变换法利用正交变换的性质，保留了距离、弧长等几何度量，避免了复杂的三角函数运算和角度分析，将问题简化为熟悉的形式；微元法需要处理各种微元的近似和复杂的关系转换，概念理解上相对复杂。

(二) 坐标变换法在教学方面的价值

坐标变换法体现了“化归”的数学思想，帮助学生建立了线性代数与微积分知识之间的联系，培养了学生的数学思维和创新意识。但是，坐标变换法在教学中需要学生已经具备了线性代数中正交变换的知识，如果现有的培养方案无法使得两门课程的同步，那么还是无法实施这一方法。从长远来看，分析和代数的思想是一体的，教师在教学过程中应当选取合适的教学案例，向学生渗透分析和代数的核心思想。

(三) 其他坐标变换法

本文中的坐标变换是正交变换，正交变换保持几何度量(如距离和弧长)不变，距离不变，保证了在新的坐标系下，旋转体没有变化(如无伸缩变化等)，因此可以直接套用平行于坐标轴的旋转体的体积或者侧面积计算公式，再利用参数方程即可。若换成一般的坐标变换，比如变换

$$\begin{cases} x' = x + my, \\ y' = -mx + y, \end{cases}$$

可以把斜直线 $y = mx + b$ 变成 $y' = b$，即平行于 x' 轴的直线，坐标原点变为坐标原点。但是曲线 $y = f(x)$ 到斜直线的距离会有伸缩，伸缩的倍数可以通过如下式子来验证：

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{1+m^2}\sqrt{x^2+y^2} \text{ 。} \tag{1.7}$$

因此，原圆盘半径为新坐标系下圆盘半径的 $\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$ 倍，且由于自变量微元对应黎曼和中的 Δx，因此 $dx = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}dx'$，所以原体积 V 与新坐标系下旋转体的体积 V' 的关系如下：

$$V = \frac{1}{\left(1+m^2\right)^{3/2}}V',$$

在此变换下，曲线 $y = f(x)$ 有如下参数表达：

$$\begin{cases} x' = x + mf(x), \\ y' = -mx + f(x), \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{\left(1+m^2\right)^{3/2}}V' = \frac{\pi}{\left(1+m^2\right)^{3/2}}\int_{x_1'}^{x_2'}\left[y'-b\right]^2 dx' \\ &= \frac{\pi}{\left(1+m^2\right)^{3/2}}\int_p^q\left[-mx+f(x)-b\right]^2\left(1+mf'(x)\right)dx. \end{aligned} \tag{1.8}$$

对于侧面积，我们也可以类似地验证，由于弧长微元 ds 对应黎曼和中的 $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$， ds' 对应黎曼

和中的 $\sqrt{\Delta x'^2+\Delta y'^2}$ ，因此

$$ds=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}ds'.$$

且

$$\begin{aligned}ds'&=\sqrt{\left(1+mf'(x)\right)^2+\left(-m+f'(x)\right)^2}dx\\&=\sqrt{1+m^2}\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx.\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{\left(1+m^2\right)^{2/2}}S'\\&=\frac{2\pi}{\left(1+m^2\right)^{2/2}}\int_{x_1'}^{x_2'}\left|y'-b\right|ds'\\&=\frac{2\pi}{\left(1+m^2\right)^{2/2}}\int_p^q\left|-mx+f(x)-b\right|\sqrt{1+m^2}\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx\\&=\frac{2\pi}{\left(1+m^2\right)^{1/2}}\int_p^q\left|-mx+f(x)-b\right|\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx.\end{aligned}$$

通过上述计算，可以发现正交变换保持几何度量(如距离和弧长)不变的性质在解题中起到了非常重要的作用，避免了思考由于其他坐标变换带来的旋转体的伸缩导致的原来体积与现在体积存在倍数 $\frac{1}{\left(1+m^2\right)^{3/2}}$，原来侧面积与现在侧面积之间存在倍数 $\frac{1}{\left(1+m^2\right)^{2/2}}$，这与体积是三维的，侧面积是二维的恰好吻合。

同学们还可以课下尝试用其他类似的坐标变换来计算旋转体的体积或者侧面积，比如 $\begin{cases}x'=x+my\\y'=-mx+y-b\end{cases}$，$\begin{cases}x'=x+my\\y'=mx-y\end{cases}$，或者 $\begin{cases}x'=x+my\\y'=mx-y+b,\end{cases}$ 从而更深层次地理解正交变换的坐标变换在计算旋转轴为斜直线时旋转体的体积或者侧面积时对问题的简化。

总之，坐标变换在旋转体体积与侧面积计算中的应用，不仅是一种解题技巧，更是数学思维的载体。它让学生明白：数学的价值不仅在于“计算结果”，更在于“思维方式”——通过化归解决复杂问题，通过严谨推理验证结论正确性，通过跨学科融合实现知识迁移。这种能力的培养，正是微积分教学在新时代的核心目标——为培养兼具理论深度和实践能力的高素质人才奠定基础。

参考文献

[1] Stewart, J. (2014) Calculus. Seventh Edition, Cengage Learning.

[2] 华东师范大学数学系编 .数学分析(上册) [M]. 北京: 高等教育出版社, 1980: 200-300.

[3] 孙成金, 张建军, 李战国. 旋转轴为任意直线时旋转体体积的计算[J]. 河南教育学院学报(自然科学版), 2015(4): 62-64.

[4] 袁俊华, 张文武. 一般旋转体的体积和侧面积计算公式[J]. 安庆师范学院学报(自然科学版), 2008(2): 76-78.

[5] 吴旭婷. 平面图形绕斜轴旋转所成旋转体的体积与侧面积[J]. 思茅师范高等专科学校学报,2005, 21(3): 57-58.