College and Job 职业教育发展, 2025, 14(9), 300-310
Published Online September 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ve
https://doi.org/10.12677/ve.2025.149444

人教A版高中数学必修二“几何与代数”部分“拓广探索”习题的难度分析

马文惠

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2025年8月11日；录用日期：2025年9月11日；发布日期：2025年9月22日

摘　要

选择人教A版高中数学教材“几何与代数”的“拓广探索”题为对象，以鲍建生教授的难度模型为基础，以文本分析为研究方法，研究拓广探索题的难度。基于研究结论，对教师教学提出建议。

关键词

“拓广探索”，习题难度，“几何与代数”

Difficulty Analysis of the “Extended Exploration” Exercises in the “Geometry and Algebra” Section of People’s Education Press Edition A Compulsory High School Mathematics Book II

Wenhui Ma

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Aug. 11th, 2025; accepted: Sep. 11th, 2025; published: Sep. 22nd, 2025

Abstract

Selecting the “Extended Exploration” exercises from the “Geometry and Algebra” section of the People’s Education Press Edition A high school mathematics textbook as the subject, this study employs text analysis as the research method and is based on Professor Bao Jiansheng’s difficulty model to

文章引用: 马文惠. 人教 A 版高中数学必修二“几何与代数”部分“拓广探索”习题的难度分析[J]. 职业教育发展, 2025, 14(9): 300-310. DOI: 10.12677/ve.2025.149444

investigate the difficulty level of these extended exploration problems. Based on the research findings, instructional recommendations for teachers are proposed.

Keywords

"Extended Exploration", Exercise Difficulty, "Geometry and Algebra"

1. 问题提出

教师教授知识与学生获取知识的过程都少不了教科书的指引，而习题是教科书的重要内容之一。2004 年人教 A 版高中数学教材与 2019 年人教 A 版高中数学教材在习题设置方面有所不同，由旧版的"A 组"和"B 组"变化为新版的"复习巩固"、"综合运用"、"拓广探索"三个层次，且三个层次的习题难度逐渐增加。新版教科书中的"拓广探索"习题能够培养学生的发散思维，提高解决问题的能力[1]。

于学生而言，"拓广探索"栏目处于教材的第三个层次，这个层次中的习题具有开放性、综合性的特点，能够帮助学生更好地建立知识网络；于教师而言，拒绝题海战术，教师充分理解"拓广探索"习题，利用其培养学生的数学核心素养，强化学生的思维；于高考而言，高中阶段学习方法尤为重要，避免盲目刷题，立足教材习题，举一反三，发散思维，从容面对高考。

研究"拓广探索"习题的难度，利于教师根据能力不同的学生进行不同的教学，实现因材施教；利于学生更好地从教材习题向高考试题过渡；利于编写人员不断改善教材习题的各个难度因素水平，使其趋于全面发展的理想状态，提高教科书习题的质量。

并且新版必修教材的"几何与代数"领域是高中数学课程的重要内容。在此背景下，以高中数学 2019 年人教 A 版必修教科书"几何与代数"部分为例，研究"拓广探索"习题的难度。

2. 研究设计

2.1. 研究对象

本文选择研究的是 2019 年人教 A 版必修第二册第六、七、八章中"几何与代数"内容的"拓广探索"习题。

2.2. 研究方法

2.2.1. 关于难度模型的已有研究

目前，现有的难度模型有黄甫全教授提出的课程难度灰色动态模型(课程内容在广度、深度和进度上的时空分析) [2]、Yeping Li 的习题三维框架(数学特征、文字特征、达到的要求(答案类型、认知要求)) [3]、Nohara 综合难度模型(扩展性问题、实际背景、运算、多步推理) [4]、鲍建生综合难度模型(背景、探究、知识含量、运算、推理) [5]、史宁中课程难度模型(课程深度(S)、课程广度(G)、课程时间(X)；难度模型公式：$N=\alpha_1\cdot\frac{G}{T}+\alpha_2\cdot\frac{S}{T}+\alpha_3\cdot\frac{X}{T}$) [6]、吴立宝习题难度公式(要求水平(YQ)、知识点个数(ZS)、背景(BJ)；计算公式为：$N_i=\alpha\times YQ_i+\beta\times ZS_i+\gamma\times BJ_i\left(i=1,2,3,4,5\right)$) [7]。

史宁中与黄甫全的模型常用于国家或地区课程标准的国际比较和教材整体内容的难度评估。但在本

研究中不适用，因为本研究对象是教材中某几个章节的部分习题，不是整体课程。分析广度、深度和进度对于习题分析来说有些过于宽泛和抽象，并且黄甫全教授的模型不易操作。Yeping Li 和 Nohara 是早期将习题难度操作化、维度化进行重要探索的学者，后有鲍建生教授基于此模型构建新的适用于习题难度研究的模型，常用于初步的习题特征分析，上述模型提供了思路，但维度不够全面。吴立宝模型有量化公式，具有可操作性和可比较性，常用于试卷的难度预测。其“知识点个数”与“背景”维度与本研究相关，但“要求水平”维度可能不如鲍建生模型的“探究”维度划分得细致，且缺少对“推理”的考量，而推理恰是几何的核心，不可缺少。鲍建生难度模型是一个多维度的综合模型，常用于教材习题的深度的判断，利于学者评估习题对核心素养的培养倾向且引导学者思考教学的方式。

选择鲍建生模型作为本研究的框架是由研究对象的特性和模型自身的特性共同决定的。本研究的对象是“拓广探索”习题，“拓广探索”习题的目的就在于培养学生的核心素养。鲍建生模型的五个维度，“探究”对应“数学抽象”、推理对应“逻辑推理”、“运算”对应“数学运算”、“知识含量”反应学生综合运用的能力、“背景”对应“数学建模”。使用该模型进行分析，能帮助教师更好地利用“拓广探索”题培养学生各方面的素养。此模型也很好地揭示“几何与代数”模块的学科特点，“几何与代数”部分的核心是空间想象、逻辑推理和数形结合。该模型单独将“推理”细分为三个难度水平，能刻画几何题对学生的要求，这是其他模型所忽视或淡化的。

2.2.2. 难度模型水平划分

鲍建生教授综合难度模型中的难度因素有背景、探究、知识含量、运算，推理因素水平划分和计算公式如下：

$$d_i = \frac{\sum_j n_{ij} d_{ij}}{n} \left(i = 1,2,3,4,5;\ j = 1,2,3,4 \right),$$

其中，d_i 为五个难度因素上的取值；d_{ij} 为第 i 个难度因素的第 j 个水平的权重(依水平分别取 1、2、3、4)；n_{ij} 则表示这组题目中属于第 i 个难度因素的第 j 个水平的题目的个数，其总和等于该组题目的总数 n。

以人教 A 版必修第二册第六章第四节“拓广探索”第 22 题第 1 小问为例，具体题目如下，难度因素的划分水平情况如表 1 所示。

例　a,b,c 分别为 ΔABC 三个内角 A,B,C 的对边，$a\cos C + \sqrt{3}\sin A\sin C - b - c = 0$。

求 A。

Table 1. Levels and classification of the five factors
表 1. 五个因素的不同水平以及划分情况

难度因素	难度水平	说明	例示
探究	识记	不需要理解，只需记忆公式、法则、定义、定理，对它们能直接使用。	在探究因素上属于理解水平。首先知道诱导公式的基础上，还要有减少字母的意识，并且会合理地选择公式，以及会逆用公式。不仅仅是直接地机械式套用公式，并且没有涉及到建立模型、提出猜想的环节，所以属于理解水平。
	理解	需要选择出正确的方法，灵活地运用知识，一般介于识记和探究之间。	
	探究	建立数学模型，形成猜想，一般需要综合题目条件，分析得出答案。	
背景	无	基于数学事实，无背景。	此题没有任何背景因素，所以属于无背景因素水平。
	个人生活	与学生生活息息相关的。	
	公共常识	学生很少经历的，在社会上跟某个领域相关的。	
	科学情境	跨学科的，有科学知识的。	

续表

运算	无	无运算。	在运算因素上，有两步以上的运算，涉及字母属于复杂运算。
	数值计算	常规数字之间的加减乘除、乘方等运算，无符号字母。	
	简单符号运算	一两步的带有符号运算的，有简单的数理逻辑推理的。	
	复杂符号运算	两步以上的有符号运算的，有复杂推理的，比如涉及到证明。	
推理	无	无推理。	利用了正弦定理算一步推理，接着利用诱导公式算第二步推理，最后利用两角和的正弦公式算第三步推理，最后整理展开的式子再逆用两角差的正弦公式，算第四步推理。属于复杂推理水平。
	简单推理	一到两个推理步骤，像“由什么得到什么，因为什么所以什么”这样的算一个推理步骤，由已知的内容推出新内容。	
	复杂推理	两个以上的步骤。	
知识含量	一个知识点	知识点个数以教材三级标题为准，无三级标题就以二级标题为准，以此类推。比如，6.2 平面向量的运算中有 4 个 3 级标题，分别为：向量的加法运算、向量的减法运算、向量的数乘运算、向量的数量积。这四个三级标题分别为四个知识点，只要是三级标题下的内容均属于此知识点。	在此过程中一共涉及三个知识点：正弦定理、诱导公式、两角和差的正弦公式。所以第一小问在知识含量上属于两个以上知识点水平。
	两个知识点		
	两个以上知识点		

2.3. 编码方法

1) 习题数量编码方法

本文选取高中新人教 A 版“几何与代数”部分为研究例题，即必修第二册第六章“平面向量及其应用”、第七章“复数”、第八章“立体几何初步”这三章的“拓广探索”题，若有一题中含有几小问，每一小问算一题，共计 43 题。

$6.1[4]$ 表示 6.1 节第 4 题，$6.3[15(1)(2),16]$ 表示 6.3 节有两道题，15 题和 16 题，第 15 题有两小问。“复习参考题”用 F 代替，例如第六章中复习参考题第 18 题即 $F6[18]$，如表 2 所示。

Table 2. Exercise quantity coding
表 2. 习题数量编码

研究内容	习题数量	题号分布
六、平面向量及其应用	20	$6.1[4]$；$6.2[21,22,23(1)(2),24]$；$6.3[15(1)(2),16]$；$6.4[19,20(1)(2)(3),21(1)(2),22(1)(2),23]$；$F6[18,19]$
七、复数	10	$7.1[10,11]$；$7.2[8(1)(2),9,10]$；$7.3[9,10]$；$F7[9,10]$
八、立体几何初步	13	$8.1[10(1)(2)]$；$8.2[8]$；$8.3[9]$；$8.4[9,10]$；$8.5[14,15]$；$8.6[19,20,21]$；$F8[15,16]$

2) 习题难度模型中影响因素以及水平的编码

“探究因素”、“背景因素”、“运算因素”、“推理因素”、“知识含量因素”分别编码为“A”、“B”、“C”、“D”、“E”，难度因素下水平的编码，以它的难度编码为基础，依次用难度因素的编码加下标(数字)来编码，例如探究因素下的理解水平编码为“A_2”，首先难度因素的编码为“A”，理解水平对应下标 2，即“A_2”，如表 3 所示。

Table 3. Exercise difficulty model coding
表 3. 习题难度模型编码

难度因素	水平/编码			
探究/A	识记/A_1	理解/A_2	探究/A_3	
背景/B	无背景/B_1	个人生活/B_2	公共常识/B_3	科学情景/B_4
运算/C	无运算/C_1	数值计算/C_2	简单符号运算/C_3	复杂符号运算/C_4
推理/D	无推理/D_1	简单推理/D_2	复杂推理/D_3	
知识含量/E	一个知识/E_1	两个知识/E_2	两个以上知识/E_3	

2.4. 信度检验

为了保证编码的真实性和有效性，对编码进行信度检验，本研究编码共由四人完成，本人以及同专业的三名研究生。本人先制定五个因素不同水平的划分情况，形成表 2，以此为标准，先由本人完成两次编码，两次编码需要在一定时间间隔下进行，最后根据两次编码确定最后的结果，再由其他三名同学对 43 道习题难度因素进行编码。四人编码结果的肯德尔协同系数为 0.774。见图 1。编码结果一致的直接采用，若不一致，讨论达成一致，形成最终的表 4。

检验统计	
N	4
肯德尔 W[a]	.774
卡方	529.614
自由度	171
渐近显著性	< .001

a. 肯德尔协同系数

Figure 1. Kendall's synergy coefficient
图 1. 肯德尔协同系数

3. 研究结果

对“几何与代数”部分的所有习题难度进行编码。如 6.4[22(1)]难度编码为 $A_2B_1C_1C_4D_3E_3$，表示 6.4 节第 22 题第 1 小问，在探究因素上属于理解水平(A_2)，在背景因素上属于无背景水平(B_1)，在运算因素上属于复杂运算水平(C_4)，在推理因素上属于复杂推理水平(D_3)，知识含量因素上属于两个以上知识点水平(E_3)。具体如何划分水平见表 4。

Table 4. “Geometry and Algebra” exercise coding
表 4. “几何与代数”部分所有习题编码

习题题号	难度编码	习题题号	难度编码	习题题号	难度编码
6.1[4]	$A_1B_1C_1D_1E_1$	6.1[21]	$A_2B_4C_2D_2E_2$	6.2[22]	$A_1B_1C_2D_1E_2$
6.2[23(1)]	$A_2B_1C_1D_1E_2$	6.2[23(2)]	$A_2B_1C_2D_2E_2$	6.2[24]	$A_2B_1C_3D_2E_2$
6.3[15(1)]	$A_1B_1C_1D_1E_1$	6.3[15(2)]	$A_1B_1C_1D_1E_1$	6.3[16]	$A_2B_1C_2D_2E_2$
6.4[19]	$A_3B_1C_4D_3E_3$	6.4[20(1)]	$A_2B_1C_3D_2E_2$	6.4[20(2)]	$A_2B_1C_2D_2E_1$
6.4[20(3)]	$A_2B_1C_2D_1E_1$	6.4[21(1)]	$A_3B_3C_1D_1E_2$	6.4[21(2)]	$A_3B_3C_4D_3E_2$

续表

6.4[22(1)]	$A_2B_1C_4D_3E_3$	6.4[22(2)]	$A_2B_1C_4D_3E_1$	6.4[23]	$A_3B_2C_4D_3E_3$
F6[18]	$A_3B_3C_1D_3E_2$	F6[19]	$A_3B_1C_4D_3E_3$	7.1[10]	$A_2B_1C_3D_1E_2$
7.1[11]	$A_2B_1C_2D_2E_2$	7.2[8(1)]	$A_1B_1C_3D_1E_1$	7.2[8(2)]	$A_1B_1C_3D_1E_1$
7.2[9]	$A_2B_1C_3D_2E_1$	7.2[10]	$A_3B_1C_1D_3E_1$	7.3[9]	$A_3B_1C_4D_3E_3$
7.3[10]	$A_3B_1C_3D_2E_3$	F7[9]	$A_2B_1C_4D_2E_1$	F7[10]	$A_2B_1C_3D_2E_2$
8.1[10(1)]	$A_2B_1C_1D_2E_1$	8.1[10(2)]	$A_3B_1C_1D_3E_1$	8.2[8]	$A_2B_2C_2D_1E_1$
8.3[9]	$A_3B_2C_2D_2E_2$	8.4[9]	$A_3B_2C_2D_2E_2$	8.4[10]	$A_2B_1C_1D_2E_1$
8.5[14]	$A_1B_1C_1D_3E_2$	8.5[15]	$A_2B_2C_1D_3E_3$	8.6[19]	$A_2B_1C_1D_3E_3$
8.6[20]	$A_2B_1C_1D_3E_3$	8.6[21]	$A_2B_1C_1D_3E_2$	F8[15]	$A_3B_1C_1D_2E_3$
F8[16]	$A_2B_1C_1D_3E_3$				

接下来研究结果将从五个难度因素以及雷达图进行分析。

3.1. 探究水平

43 道拓广探索习题中，有 7 道属于“识记”水平，占习题总数的 16.28%，有 24 道属于“理解”水平，占习题总数的 55.81%，有 12 道属于“探究”水平，占习题总数的 16.28%。难度因素“探究”上的加权平均值为 2.12，见图 2。

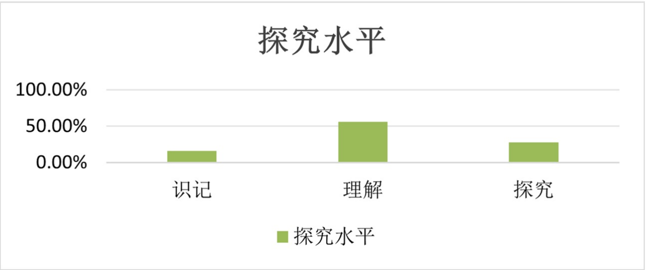

Figure 2. Bar chart of statistical results at the exploratory level
图 2. 在探究水平上统计结果的条形图

在“探究”水平上，利用数据计算出偏态系数为−0.124，分布为左偏，峰度为−0.694，为扁平分布，表明了在难度因素下分布大致对称。通过数据可以看到，较少的题目直接考查学生对于所学知识的记忆，知识的直接应用，大部分题目都考查学生对知识的理解程度，学生对知识的灵活应用能力，也有考查学生对所学知识进行拓展和延伸的题目，对学生要求更高。

数据显示，对于教育而言，教师要追求过程而不是结果，可以看到，识记水平的题目较少，“拓广探索”题要求学生不仅要知道“是什么”更要知道“为什么”，建构主义学习理论就强调学生要在主动探索中构建知识体系，从而才能灵活运用知识。教师也应该从一味输出向引导、探究的方向转变，将课堂交给学生，利用“拓广探索”题实现因材施教，对于学习能力弱的学生，可以先从识记类题目入手，对于能力强的学生，可以利用探究类题目进行深度思考。既然教学上建议教师要注重知识产生的过程，那么教师对学生的评价也不该只看结果，要多加关注学生的思维过程。

例如第六章复习参考题中的第 18 题，设计一种借助两个观察点 C,D （其中 C,D 之间的距离是 d)测量航船的航向与速度的方法。这种开放性的题目就需要在掌握本章知识的基础上，自己分析，综合学过

的知识建立模型并解题。这道题属于探究水平。

3.2. 背景水平

43 道拓广探索习题中，有 35 道属于“无实际背景”水平，占习题总数的 81.39%，有 5 道属于“个人生活”水平，占习题总数的 11.63%，有 3 道题属于“公共常识”水平，占习题总数的 7.14%，有道 0 题属于“科学情境”水平，占习题总数的 0%。难度因素在“背景”上的加权平均值为 1.26，见图 3。

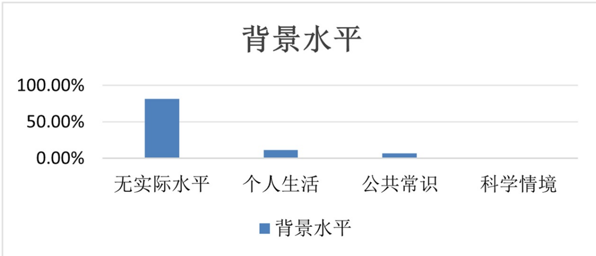

Figure 3. Bar chart of statistical results at the background level
图 3. 在背景水平上统计结果的条形图

在“背景”水平上，利用数据计算出偏态系数为 2.113，分布为右偏，峰度为 3.537，为尖峰分布。通过数据我们可以看到，难度集中在中低水平，变化较小，“拓广探索栏目”中习题很少设置实际背景，只有少数题目会设置，而其中仅仅只有 1 道题与“科学情境”有关。

可以发现，在必修阶段，教材习题多以无背景，也就是纯数学背景呈现，能更好地帮助学生克服空间想象这一难点，确保学生在直观想象、逻辑推理等核心素养上的发展。这一难度水平要求学生具备一定的数学建模素养，要从实际情境中抽象出数学问题来，从而进行建模。在教学上建议教师引导学生掌握图形结构，从中培养学生的数学抽象和逻辑推理能力。

例如第六章第三节中的第 16 题，用向量方法证明：对于任意的 $a,b,c,d \in R$，恒有不等式 $(ac+bd)^2 \le (a^2+b^2)(c^2+d^2)$。此题属于无背景，大部分题目和此题一样，基于数学事实，没有任何背景。跨学科教学是现在比较提倡的，这不仅仅可以体现在教学中，也可以体现在练习题中，与其他学科相结合作为习题背景。

3.3. 运算水平

43 道拓广探索习题中，有 18 道属于“无运算”水平，占习题总数的 41.86%，有 9 道属于“数值计算”水平，占习题总数的 20.93%，有 8 道属于“简单符号运算”水平，占习题总数的 16.28%，有 8 道属于“复杂符号运算”水平，占习题总数的 18.60%。难度因素在“运算”上的加权平均值为 2.14，见图 4。

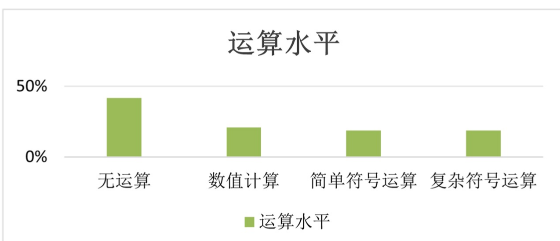

Figure 4. Bar chart of statistical results at the computational level
图 4. 在运算水平上统计结果的条形图

在“运算”水平上，利用数据计算出偏态系数为0.45，分布为右偏，峰度为−1.28，为扁平分布，说明在运算难度上倾向于较低水平，且难度水平分布比较分散。只有8道题目属于复杂符号运算，可以看出“几何与代数”部分在“拓广探索”栏目中对于运算能力要求并不高，掌握简单符号运算即可。

数据显示，“拓广探索”题的首要目的不是训练学生的计算能力，而是在训练他们的空间想象和逻辑推理能力，这部分习题的目的在于训练学生的思维能力，如果增大学生的计算量，或许会导致学生注重计算而忽略对思维的训练。但是数值计算和符号运算的题目超过了一半，这保证了运算的训练不会缺失，与课标中的要求相呼应。基于以上分析，教师应该将重点放在引导学生分析题目，探究思路上，并且引导学生思考运算的几何意义，将数形结合，体现数学的本质。

例如第七章第一节中的第10题，已知复数Z的虚部为$\sqrt{3}$，在复平面内复数Z对应的向量的模为2，求这个复数Z。

利用已知信息将复数Z表示出来，根据向量的模长为2，得到$a^2+\left(\sqrt{3}\right)^2=4$，将$a$解出来，最后将复数$Z$表示出来。此题只需要根据已知信息将式子列出来，并开方得到a即可，只需一步计算，并且包含了未知数。

3.4. 推理水平

43道拓广探索习题中，有11道属于“无推理”水平，占习题总数的25.58%，有17道属于“简单推理”水平，占习题总数的39.53%，有15道属于“复杂推理”水平，占习题总数的34.88%。难度因素在“推理”上的加权平均值为2.09，见图5。

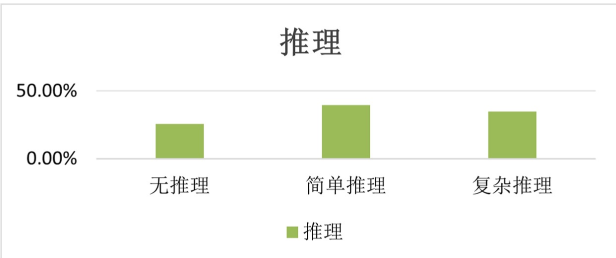

Figure 5. Bar chart of statistical results at the reasoning level
图5. 在推理水平上统计结果的条形图

在“推理”水平上，利用数据计算出偏态系数为−0.15，分布为左偏，峰度为−1.31，为扁平分布，说明教材设计的习题在推理水平上较为平衡，没有极端偏向，且分布平坦，没有集中在某一水平。大部分题目都考查了学生的推理水平，平均地集中在简单推理和复杂推理中。

简单推理的题目，是培养学生形成逻辑思维的关键，而复杂推理要求学生能够处理多个知识点之间的关系，培养综合解决问题的能力。在教学上，简单推理的题目是教学的重点，教师应该引导学生思考推理的依据，复杂推理题是很好的探究式教学的素材。

例如第六章第四节中的第19题，如图6所示，在▱$ABCD$中，点E，F分别是AD，DC边的中点，BE，BF分别与AC交于R，T两点，你能发现AR，RT，TC之间的关系吗？用向量方法证明你的结论。

这道题在推理难度上属于复杂推理，首先，先将向量$\overrightarrow{AC}$用$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AD}$表示出来，因为$\overrightarrow{AR}$和$\overrightarrow{AC}$共线，所以用$\overrightarrow{AC}$去表示$\overrightarrow{AR}$，用$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AE}$表示$\overrightarrow{EB}$，因为$\overrightarrow{ER}$和$\overrightarrow{EB}$共线，所以用$\overrightarrow{EB}$表示$\overrightarrow{ER}$。再用$\overrightarrow{AE}$和$\overrightarrow{ER}$表示$\overrightarrow{AR}$，已经用了两种方式表示了$\overrightarrow{AR}$，那么这两个式子相等，通过整理，以及因为$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AD}$不共线，从而得到$\overrightarrow{AR}$与$\overrightarrow{AC}$之间的关系，同理，得到$\overrightarrow{TC}$与$\overrightarrow{AC}$之间的关系以及$\overrightarrow{RT}$与$\overrightarrow{AC}$之间的关系，

最后得到结论，$AR = RT = TC$。这道题的推理步骤在两步以上，属于复杂推理水平。因为R,T是对角线上的两点，所以判断AR,RT,TC之间的关系只需要判断出AR,RT,TC与AC的关系即可。

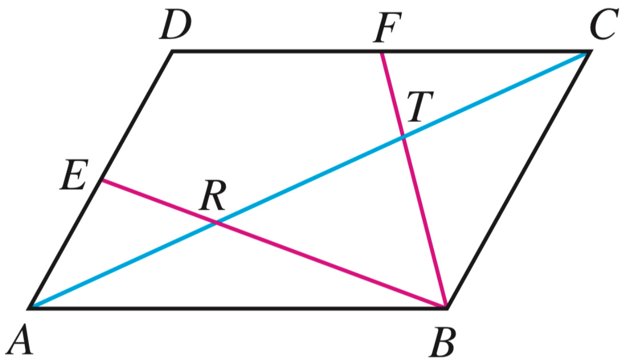

Figure 6. Parallelogram
图 6. 平行四边形

3.5. 知识含量

43 道拓广探索习题中，有 16 道属于“单个知识点”水平，占习题总数的 37.21%，有 16 道属于“两个知识点”水平，占习题总数的 37.21%，有 11 道属于“两个以上知识点”水平，占习题总数的 25.58%。难度因素在知识含量上的加权平均值为 1.88，见图 7。

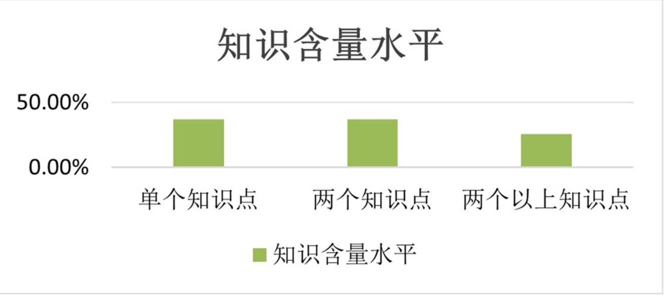

Figure 7. Bar chart of statistical results at the knowledge content level
图 7. 在知识含量水平上统计结果的条形图

在“知识含量”水平上，利用数据计算出偏态系数为 0.22，分布为右偏，峰度为−1.34，为扁平分布，说明在此难度因素上倾向中低水平，且习题的知识含量分布较广。过半的题目都是属于单个知识点或两个知识点水平，这与选择习题的原因有关，本研究选择每小节课后习题以及每章的复习参考题，所以体现的知识点都是本小节的内容，但新教材将课后习题分为三个层次，应该在“拓广探索”栏目中，将本小节所学的知识与其他知识相结合，培养学生灵活运用所学知识的本领。

数据显示，知识不是孤立存在的，教师应该引导学生形成自己的知识网络，面对问题时，能从自己的知识网中提取有效的相关知识从而解决问题。那么教师在教学中就应该做出转变，从讲授单个知识点到罗列知识网，从训练单一题型到训练综合能力，帮助学生进行从掌握知识到掌握能力的转变。

例如第八章第六节中的第 20 题，如图 8 所示，AB是圆$\odot O$的直径，点C是$\odot O$上的动点，过动点C的直线VC垂直于$\odot O$所在平面，D、E分别是VA、VC的中点，判断直线DE与平面VBC的位置关系，并说明理由。

DOI: 10.12677/ve.2025.149444

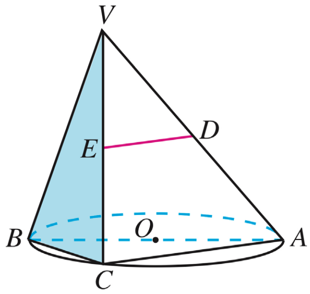

Figure 8. Circle and triangle
图 8. 圆与三角形

这道题除了考查本小节的直线与平面垂直，平面与平面垂直这两个知识点以外，还考查了圆中的直径所对的圆周角是 90°这条定理以及三角形中的中位线定理，因为 $\angle ACB$ 是直径 AB 所对的圆周角，所以 $\angle ACB$ 是 90°，得到了这个信息，再结合题目“直线 VC 垂直于 $\odot O$ 所在平面”，可以得到平面 $VAC \perp$ 平面 VBC。根据题目可知道 DE 是 ΔVAC 的中位线，从而得到 $DE \perp VC$，最后，由两个平面垂直的性质定理得到直线 DE 与平面 VBC 垂直。通过题目中的立体图形就可以看出，它涉及到了一些常见的平面图形比如三角形、圆，那么解题过程中就不可避免地需要使用到以前学过的知识。

3.6. 综合难度

通过上述分析，新人教 A 版“几何与代数”部分“拓广探索”题难度的五边形模型如图 9 所示。

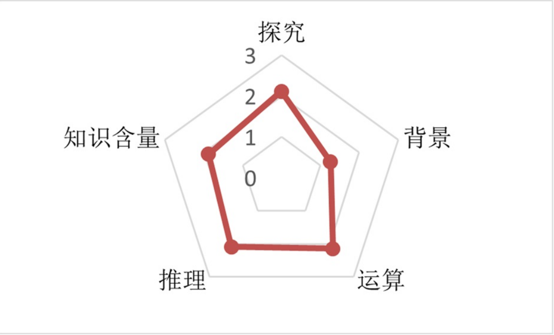

Figure 9. Comprehensive difficulty radar chart
图 9. 综合难度雷达图

通过雷达图，可以看到，在“推理”因素上难度最高，第二是“探究”因素，排在第三、第四的是“知识含量”因素和“运算”因素，难度最小的是“背景”因素。最后，整体来看，“几何与代数”这部分的“拓广探索”题在探究上难度属于理解水平，在知识含量上难度属于单个知识点水平，在推理上难度属于简单推理水平，在运算上属于数值计算水平，在背景难度上属于无背景水平。

4. 建议和启示

在综合难度中，得到的结论引发了一些思考。新人教 A 版教材将习题分为三个层次，难度依次增加，拓广探索处在最后一个层次。三个层次有各自的任务，培养学生不同的核心素养，提高学生各方面的能力。拓广探索题具有综合性、开放性、探索性。

通过雷达图，希望得到的是一个在五个难度因素上均衡发展的五边形模型，而得到的雷达图中，背

景因素这部分明显是向内凹的，相对于其他难度因素来说难度较小。在背景难度因素下划分的不同水平要求要跨学科，与生活中其他领域相关，在课程标准中提到“数学与人类生活和社会发展紧密关联。数学不仅仅是运算和推理的工具，还是表达和交流的语言。数学承载着思想和文化，是人类文明的重要组成部分。”因此，教师在教学中，可以考虑引入一些数学文化，与其他学科相联系，让数学题不再是生硬的符号公式。数学文化作为学科素养之一，不仅要体现在教学活动中，也要在练习题目中有所体现，要让学生了解数学科学与人类社会的互动关系，而数学文化可以通过“背景”因素来体现，同时能够提高学生对数学的兴趣，拓展课外知识。

参考文献

[1] 俞飞，汪乐，张启兆．高中数学“拓广探索”栏目教学的实践与思考[J]．数学通讯, 2023(2): 8-12.

[2] 黄甫全，王晶．课程难度刍论[J]．东北师大学报, 1994(4): 91-96.

[3] Li, Y.P. (2000) A Comparison of Problems That Follow Selected Content Presentations in American and Chinese Mathematics Textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education*, **31**, 234-241. https://doi.org/10.2307/749754

[4] Nohara, D. (2001) A Comparison of the National Assessment of Educational Progress (NAEP), the Third International Mathematics and Science Study Repeat (TIMSS-R), and the Programme for International Student Assessment (PISA). NECS Working Paper, No. 2001-07.

[5] 鲍建生．中英两国初中数学期望课程综合难度的比较[J]．全球教育展望, 2002, 31(9): 48-52.

[6] 史宁中，孔凡哲，李淑文．课程难度模型：我国义务教育几何课程难度的对比[J]．东北师大学报, 2005(6): 152-156.

[7] 吴立宝，王建波，曹一鸣．初中数学教科书习题国际比较研究[J]．课程·教材教法, 2014, 34(2): 112-117.