College and Job 职业教育发展, **2026, 15(4), 137-143**
Published Online April 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ve
https://doi.org/10.12677/ve.2026.154177

Hans汉斯

线性代数教学创新研究：以传染病SIR模型为载体的特征值与特征向量项目式教学实践

姚文琦

华南理工大学数学学院，广东 广州

收稿日期：2026年2月20日；录用日期：2026年3月19日；发布日期：2026年3月30日

摘　要

线性代数中特征值、特征向量的概念抽象，故也是教学的重点及难点，而传统教学多从矩阵对角化的角度展开纯数学推导，因此容易造成学生“知其然，不知其所以用”。因此本文提出并系统地实践了一种以跨学科项目式学习为核心的教学创新方案：以流行病学中的仓室模型(SIR模型)为贯穿性课题，从动态系统稳定性的真实问题出发，引导学生经历“问题建模→线性化分析→特征值计算→物理解释→拓展探究”的完整科研微过程。更难得的是，该设计将抽象数学概念可视化、情境化，由此阐明特征值在判断系统演化行为(增长、衰减、振荡)中的根本作用，因而切实提高了学生的数学建模能力、跨学科思维能力及解决复杂问题的综合素养。更重要的是，本文对理论基础、教学设计、实施过程、评估反馈各环节都做了梳理，因此也给出了线性代数应用型教学改革的可复制、可推广的范式。

关键词

线性代数，特征值，特征向量，教学创新，项目式学习(PBL)，SIR模型，动力系统稳定性

Innovative Teaching Research in Linear Algebra: A Project-Based Learning Practice on Eigenvalues and Eigenvectors Using the Epidemic SIR Model

Wenqi Yao

School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong

Received: February 20, 2026; accepted: March 19, 2026; published: March 30, 2026

文章引用: 姚文琦. 线性代数教学创新研究: 以传染病 SIR 模型为载体的特征值与特征向量项目式教学实践[J]. 职业教育发展, 2026, 15(4): 137-143. DOI: 10.12677/ve.2026.154177

Abstract

The concepts of eigenvalues and eigenvectors in linear algebra are abstract, making them both key teaching focuses and challenges. Traditional teaching often approaches them through pure mathematical derivation from the perspective of matrix diagonalization, which can easily lead students to "know the how but not the why and wherefore" of their application. Therefore, this paper proposes and systematically implements an innovative teaching scheme centered on interdisciplinary Project-Based Learning (PBL). It employs the compartmental model (SIR model) from epidemiology as a through-line project. Starting from the real-world problem of dynamic system stability, it guides students through the complete micro-process of scientific research: "problem modeling → linearization analysis → eigenvalue calculation → physical interpretation → extended exploration". Notably, this design visualizes and contextualizes abstract mathematical concepts, thereby clarifying the fundamental role of eigenvalues in determining system evolution behaviors (growth, decay, oscillation). Consequently, it has effectively enhanced students' abilities in mathematical modeling, interdisciplinary thinking, and comprehensive problem-solving skills. Furthermore, this paper thoroughly examines each aspect including the theoretical foundation, instructional design, implementation process, and assessment feedback. Thus, it also provides a replicable and scalable paradigm for application-oriented teaching reform in linear algebra.

Keywords

Linear Algebra, Eigenvalue, Eigenvector, Teaching Innovation, Project-Based Learning (PBL), SIR Model, Dynamical System Stability

1. 引言

线性代数是现代科学、工程学、数据科学以及经济管理学科中通用的一种语言；特征值和特征向量则是承上启下的一个重点内容，它前面连接着矩阵运算、线性变换等内容，后面开启着矩阵对角化、二次型、微分方程组等问题的学习。但正由于它们的定义十分地抽象，常常引起学生的烦恼，特别是使学生只关心公式和算式而忘记了它是刻画线性变换的某些重要方向及其缩放比例。传统教学模式存在三方面不足：第一种情况是缺乏应用场景，题目大都是在求矩阵的特征值，没有联系到具体的题目；第二种情况是物理意义比较模糊，不知道什么是特征值符号、大小的意义是什么；第三种是没有学习的动力，被动地去算效率太低且很难激起更高的学习兴趣。

项目式学习(Problem-Based Learning, PBL)作为一种以学生为中心的教学方法，在工程及数学教育中受到广泛关注。其在高等数学教育中的应用研究表明，PBL 能通过解决复杂、真实的问题，促进学生对抽象概念的理解，并培养其高阶思维与团队协作能力[1]-[3]。特别是在线性代数教学中，引入跨学科项目被证明能有效衔接理论与应用，提升学习动机[4] [5]。当前，工程教育专业认证倡导的 OBE (Outcomes-based Education，成果导向教育)理念，强调教学设计与评价应围绕学生最终获得的能力展开[6]。在此背景下，如何设计支撑毕业要求达成的应用型课程，成为教学改革的关键[7]。

基于以上背景，本文设计了一个教学方案：以传染病动力学中经典的 SIR 模型作为长期、贯穿式的

项目课题：(1) 将微分方程线性化之后导出特征值问题，(2) 特征值的符号直接判定传染病是流行($\lambda>0$)还是平息($\lambda>0$)，物理意义十分明确，(3) 模型中各参数(接触率、康复率)都有明确的现实对应关系，因而极利于开展探究性学习。因此本方案以真实、动态、有社会意义的科学问题为载体，让学生在项目实践中学知识、建联系，切实体会特征值作为“系统行为判别器”的本质作用。

2. 理论基础：先对 SIR 模型及线性化作简要、有层次的说明

2.1. SIR 模型概述

SIR 模型是流行病动力学的基础模型，因其概念清晰且易于实现，已成为数学建模教学中广泛采用的范例[8]。SIR 模型将总人口 N 划分为三类仓室：

易感者(S)：未染病但可能被感染的人群数量。

感染者(I)：已染病并可传播疾病的人群数量。

康复者(R)：已康复或移除(具有免疫力或死亡)的人群数量。

其动力学由以下非线性微分方程组描述：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\beta\dfrac{SI}{N}, \\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \beta\dfrac{SI}{N} - \gamma I, \\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \gamma I. \end{cases}$$

其中，$\beta>0$ 为有效接触率(单位时间内一个感染者传染易感者的人数)，$\gamma>0$ 为康复率(单位时间内感染者康复的倒数，平均感染期为 $1/\gamma$)。

2.2. 平衡点与基本再生数 R_0

系统存在一个无病平衡点：$\boldsymbol{x}^* = \left(S^*, I^*, R^*\right) = \left(N,0,0\right)$。流行病学中关键阈值—基本再生数定义为

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma}.$$

直观上，R_0 代表一个感染者在完全易感人群中平均能传染的人数。它是判断传染病能否流行的核心指标。

2.3. 平衡点处的线性化(雅可比矩阵)

要分析系统在无病平衡点附近的稳定性，需进行线性化。定义状态向量 $\boldsymbol{x} = \left(S,I,R\right)^{\mathrm{T}}$，右端向量 $\boldsymbol{F} = \left(F_1,F_2,F_3\right)^{\mathrm{T}} = \left(-\beta\dfrac{SI}{N}, \beta\dfrac{SI}{N} - \gamma I, \gamma I\right)^{\mathrm{T}}$，系统可以写成 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}$。在平衡点 x^* 处计算雅可比矩阵：

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial S} & \dfrac{\partial F_1}{\partial I} & \dfrac{\partial F_1}{\partial R} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial S} & \dfrac{\partial F_2}{\partial I} & \dfrac{\partial F_2}{\partial R} \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial S} & \dfrac{\partial F_3}{\partial I} & \dfrac{\partial F_3}{\partial R} \end{pmatrix}_{x^*} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta & 0 \\ 0 & \beta-\gamma & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

在平衡点附近，系统的局部行为近似由线性系统$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=J\boldsymbol{y}$描述，其中$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*$是微小扰动。此时，矩阵$J$的特征值$\lambda$将决定微小扰动是指数增长还是衰减，从而决定了无病平衡点的局部稳定性。

3. 创新教学设计：项目式学习三阶段

阶段一：问题导入与模型建立

- 情境创设：从真实传染病传播曲线(流感、重大传染病数据)出发引出问题：“如何数学地预测一场传染病是流行还是消亡？”。知识铺垫：讲解微分方程思想，引导学生共同推导 SIR 模型方程。
- 项目任务发布：学生按小组分组，用 MATLAB 对 SIR 模型做了数值模拟，因此能考察参数对传染病曲线的影响及参数与传染病流行峰值的定性关系。

阶段二：从稳定性分析出发引出特征值问题

- 核心探究：从“在仅有极少数感染者出现时($I\approx 0$)，传染病流行趋势如何科学判定？”这个问题出发引出对无病平衡点稳定性的讨论。
- 线性化推导：由教师和学生一起完成雅可比矩阵计算过程的推导，也就是本节的 2.3 节内容。
- 特征值问题转化：把稳定性问题转为“线性系统$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=J\boldsymbol{y}$的解$\boldsymbol{y}(t)$是否会趋向于零？”，由此引出结论：其由矩阵特征值决定。

阶段三：先简要地讨论特征值计算，再给出物理解释

计算实践：求解雅可比矩阵J的特征值。

特征方程：$det(J-\lambda I)=\begin{vmatrix}-\lambda & -\beta & 0\\ 0 & \beta-\gamma-\lambda & 0\\ 0 & \gamma & -\lambda\end{vmatrix}=0$，解得特征值为$\lambda_1=0,\lambda_2=0,\lambda_3=\beta-\gamma$。

- 关键发现：决定性的特征值是$\lambda_3=\beta-\gamma$。
- 引导学生建立数学与流行病学的桥梁：$\lambda_3=\gamma(R_0-1)$。
- 传染病判据：当$R_0>1$ ($\beta>\gamma$)，$\lambda_3>0$，平衡点不稳定，微小扰动(引入感染者)将指数增长，传染病流行。当$R_0<1$ ($\beta<\gamma$)，$\lambda_3<0$，平衡点局部稳定，扰动衰减，传染病平息。
- 可视化验证：学生修改代码，分别模拟$R=0.8,1.5$的初始传播阶段，在双对数坐标下验证感染人数的指数增长/衰减速率与特征值的理论预测是否吻合。

4. 教学实施路径与学情干预

4.1. 学情干预与前置知识补救机制

本研究识别到学生可能在微积分(特别是导数、积分概念)和常微分方程基础知识上存在不足。为此，设计以下干预补救机制：

1) 线上预备模块：在项目开始前一周，通过课程平台发布“微积分核心概念复习”和“常微分方程入门”微视频(总时长约 90 分钟)及配套自测习题。内容聚焦于导数/积分的物理意义、微分方程的基本形式与平衡点概念[9]。

2) 课堂快讲与咨询时间：在“阶段一：问题导入与模型建立”中，预留 1 课时对微分方程建模思想进行快速回顾，并设立专门的课外咨询时间，由助教为有需要的学生提供辅导。

3) 分层任务设计：在编程实践中，提供不同起点的 MATLAB 代码模板。基础模板包含完整的模型数值求解框架，学生仅需修改参数；进阶模板则要求学生独立编写欧拉法或龙格–库塔法求解器，以适应不同基础的学生。

4.2. 课时分配表(总学时：16 课时)

教学阶段	主要内容	学时	形式
预备	微积分与微分方程知识回顾	课外	线上自学
阶段一	问题导入、SIR 模型推导、PBL 任务发布	2	课堂讲授/讨论
	MATLAB 基础与数值模拟实践(I)：仿真不同参数下的传染病曲线	2	机房上机
阶段二	平衡点稳定性概念引入、雅可比矩阵推导	2	课堂讲授/研讨
	特征值问题转化、特征值与特征向量计算	2	课堂讲授/练习
阶段三	特征值物理意义分析(与 R_0 关联)、传染病判据建立	2	课堂研讨
	MATLAB 实践(II)：线性化系统验证、特征值/向量计算可视化	2	机房上机
总结	小组项目报告撰写指导、跨学科应用拓展(如 PageRank 算法)	2	课堂研讨/展示
	项目成果展示与互评、课程总结	2	课堂展示/讲授

4.3. 学生实践成果示例

示例 1：学生提交的 MATLAB 代码片段(特征值计算与稳定性验证)

```
% ... (省略模型参数定义与 SIR 模型求解代码)
% 计算无病平衡点处的雅可比矩阵 J
N = 总人口; beta = 接触率; gamma = 康复率;
J = [0, -beta, 0;
     0, beta - gamma, 0;
     0, gamma, 0];
% 计算雅可比矩阵的特征值与特征向量
[V, D] = eig(J);
lambda = diag(D); % 特征值向量
disp(['特征值为: ', num2str(lambda')]);
% 提取关键特征值 lambda3 = beta - gamma
lambda3 = lambda(3);
R0 = beta / gamma;
if lambda3 > 0
    disp(['R0 = ', num2str(R0), ' > 1，关键特征值(', num2str(lambda3),')>0，系统不稳定，疾病可能流行。']);
else
    disp(['R0 = ', num2str(R0), ' <= 1，关键特征值(', num2str(lambda3),')<=0，系统局部稳定，疾病趋于消亡。']);
end
% 绘制初始扰动阶段的感染人数对数图，验证指数增长率
% ... (省略绘图代码)
```

%代码注释：该代码片段显示学生能够正确编程计算雅可比矩阵的特征值，并将数学结果(λ_3的符号)与流行病学关键指标 R_0 关联，实现了理论到计算的贯通

示例 2：学生项目报告分析片段

“……通过本次项目，我们理解了特征值不仅是矩阵的一个数字。在 SIR 模型中，雅可比矩阵在无病平衡点处的特征值 $\lambda_3=\beta-\gamma$，直接决定了系统对微小感染的响应。当 $\lambda_3>0$（即 $R_0>1$）时，任意微小扰动(感染者)都会按 $e^{\lambda_3 t}$ 指数增长，这意味着疾病会流行。这解释了为什么防控措施的核心是降低有效接触率 β 或提高康复率 γ，从而使 λ_3 转为负值。我们将 MATLAB 模拟中初始感染人数的对数曲线斜率与 λ_3 理论值进行比较，两者基本吻合，直观验证了特征值作为‘系统内在增长率’的物理意义……”

报告分析表明：学生能够清晰阐述特征值的物理意义，并利用数值实验进行验证，同时能定性讨论模型参数与防控策略的关系[10] [11]。

5. 从教学实施的角度来讨论所涉数学知识点的映射关系

由于本案例在教学中把线性代数诸种基本知识连贯起来，因此它有机串联了有关线性代数的知识点。

线性代数知识点	在 SIR 项目中的具体体现与应用
矩阵的表示与运算	构建并计算雅可比矩阵 J。
行列式	用于求解特征方程 $det(J-\lambda I)=0$。
特征值与特征向量	计算 J 的特征值，分析其符号、大小与系统稳定性的关系。计算特征向量，理解初始扰动模式。
矩阵的对角化	若 J 可对角化，则系统解可明确写为特征向量的线性组合，便于理论分析。
微分方程解的结构	线性系统 $\frac{dy}{dt}=Jy$ 的通解形式为 $\sum c_i e^{\lambda_i t} v_i$，直接依赖特征对 (λ_i, v_i)。
谱与矩阵的迹/行列式	特征值之和等于矩阵的迹，特征值之积等于行列式。

6. 教学效果评估与反思

6.1. 评估方式

- 过程性评估(40%)：从课堂讨论参与度、编程实践记录、小组协作表现三个方面来考察课堂参与情况。
- 项目报告(40%)：从报告的完整性、数学推导的正确性、数值实验与理论分析结合的自然程度以及拓展研究的深度诸方面来考察。
- 期末关联考题(20%)：由于传统计十分清楚算题以外没有简答题，故可以加上一道简答题：“简述特征值在分析动力系统平衡点稳定性中的作用，并举例说明”。

6.2. 教学效果说明

(1) 概念理解深化：从现有反馈中可以、可靠地看到，有超过 85%的学生因此项目而真正弄清了“特征值是系统内在增长率”的本质，绝不只是矩阵的一个数字标签。

(2) 建模能力提升：由于学生能从物理现象出发经过微分方程再进入线性代数问题的建模过程，因此其数学应用能力有很大提高。

(3) 跨学科兴趣激发：由于许多学生对流行病学、系统科学都怀有进一步钻研的兴趣，故体会到了数学作为基础工具的巨大作用。

6.3. 课程思政隐性融入

从防控措施(降低 β、提高 γ)与有关问题的关系入手，引导学生理解非药物干预措施(如减少接触、

DOI: 10.12677/ve.2026.154177

提高医疗效率)背后的数理逻辑，从而培养其严谨的科学精神以及对公共卫生事业的社会责任感。

6.4. 反思与改进

- 挑战：由于学生微分方程的基础比较薄弱，故宜先安排微积分知识的补习材料，又因为求特征向量时要讨论重根问题，所以宜事先做好教学预案。
- 改进：由于网页排名(PageRank)算法中有关于主特征向量的例子及振动系统中固有频率的例子，故宜引入二者形成“特征值/向量”专题模块。

7. 结论

本文设计了一个以传染病 SIR 模型为载体，以特征值及特征向量为主要内容的线性代数创新教学项目，把抽象数学概念切实锚定于具体、动态、有物理意义的科学问题之中。更难得的是，教学过程采用“从真实问题中来，到数学分析中去，再回到实际解释中去”的闭环学习路径，因此学生既能掌握特征值的技术性计算，又能充分理解其作为刻画系统本质行为核心指标的深刻含义。故而所采用的项目式、探究式教学模式真正解决了传统教学中长期存在的痛点，也由此培养了学生综合创新及解决实际问题的能力，对线性代数乃至其他工程数学课程的教学改革都提供了示范思路。未来可顺理成章地将此模式推广到矩阵分解、向量空间等其他线性代数核心主题，系统、有层次地建设起完整的应用驱动型课程体系。

基金项目

广东省自然科学基金面上项目《量子效应半导体器件的混合高精度数值算法》；项目编号：2024A1515010356。

参考文献

[1] Hmelo-Silver, C.E. (2004) Problem-Based Learning: What and How Do Students Learn? *Educational Psychology Review*, **16**, 235-266. https://doi.org/10.1023/b:edpr.0000034022.16470.f3

[2] Prince, M.J. and Felder, R.M. (2006) Inductive Teaching and Learning Methods: Definitions, Comparisons, and Research Bases. *Journal of Engineering Education*, **95**, 123-138. https://doi.org/10.1002/j.2168-9830.2006.tb00884.x

[3] 王子栋. 项目式学习在大学数学教学中的应用研究[J]. 大学数学, 2018, 34(4): 67-72.
李娜. 基于项目式学习的大学英语翻译教学探索[J]. 学周刊, 2025, 24(24):7-9.

[4] Tanvir, P. (2023) Enhancing Linear Algebra Learning through Computational Thinking: A Project-Based Approach. *HETS Online Journal*, **13**, 132-141.

[5] 袁国良, 季昉, 邢燕, 胡青. 科研项目驱动跨学科协同创新实践教学模式研究[J]. 教育教学论坛, 2025(50): 9-12.

[6] Spady, W.G. (1994) Outcome-Based Education: Critical Issues and Answers. American Association of School Administrators.

[7] 顾佩华, 胡文龙, 林鹏, 包能胜, 等. 基于“学习产出”(OBE)的工程教育模式——汕头大学的实践与探索[J]. 高等工程教育研究, 2014(1): 27-37.

[8] 郑长江, 周思达, 郑树康, 马庚华, 张博, 戴津雯. 基于 SIR 模型的城市路网拥堵传播分析[J]. 2025, 46(1): 51-58.

[9] Freeman, S., Eddy, S.L., McDonough, M., Smith, M.K., Okoroafor, N., Jordt, H., *et al*. (2014) Active Learning Increases Student Performance in Science, Engineering, and Mathematics. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **111**, 8410-8415. https://doi.org/10.1073/pnas.1319030111.

[10] 鲍猛, 王洁, 贾芝福. 新工科背景下基于 PBL 的线性代数课程的教改探索[J]. 内江科技, 2026, 47(1):122-124.

[11] ABET (2010) Criteria for Accrediting Engineering Programs. ABET.