College and Job 职业教育发展, **2026, 15(5), 1-9**
Published Online May 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ve
https://doi.org/10.12677/ve.2026.155201

面向新工科人才培养的线性代数教学改革与实践

——以“计算机图形学”为载体的线性空间与线性变换创新教学设计

姚文琦

华南理工大学数学学院，广东 广州

收稿日期：2026年2月28日；录用日期：2026年4月23日；发布日期：2026年5月7日

摘　要

由于线性代数课程中线性空间及线性变换章节抽象性极强，学生理解困难，又存在学用分离的突出教学问题，因此本文提出了以“计算机图形学”为真实应用背景的项目式教学改革方案，把抽象的向量空间、线性变换、矩阵表示、特征值诸概念系统、有层次地映射到二维图像处理及三维模型视图变换的具体任务中，由此构造出“现象感知－数学建模－编程实现－应用拓展”的四阶学习闭环。更难得的是，借助“图像旋转缩放”和“三维模型视图变换”两个递进式实践项目，真正引导学生从被动接受转向主动探究，在解决实际工程问题的过程中自发、充分地掌握数学原理。教学实践结果十分清楚地证实，该模式有利于提高学生的几何直观能力、计算思维能力及知识迁移能力，也因而激发了学习兴趣，故而成为新工科背景下基础数学课程教学改革的可复制、可推广的范式。

关键词

线性代数，教学改革，线性变换，计算机图形学，项目式学习，可视化教学，齐次坐标

Reform and Practice of Linear Algebra Teaching for Cultivating New Engineering Talents

—An Innovative Instructional Design of Linear Spaces and Linear Transformations Using “Computer Graphics” as the Carrier

Wenqi Yao

School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong

Received: February 28, 2026; accepted: April 23, 2026; published: May 7, 2026

文章引用: 姚文琦. 面向新工科人才培养的线性代数教学改革与实践[J]. 职业教育发展, 2026, 15(5): 1-9.
DOI: 10.12677/ve.2026.155201

Abstract

Due to the high level of abstraction in the chapters on linear spaces and linear transformations within the linear algebra curriculum, students often find them difficult to understand, and a prominent issue of separation between learning and application exists. To address this, this paper proposes a project-based teaching reform scheme using "Computer Graphics" as a real-world application context. It systematically and hierarchically maps abstract concepts such as vector spaces, linear transformations, matrix representations, and eigenvalues to specific tasks involving 2D image processing and 3D model view transformation. This approach constructs a "phenomenon perception-mathematical modeling-programming implementation-application expansion" four-phase learning cycle. Notably, through two progressive practical projects—"image rotation and scaling" and "3D model view transformation"—students are genuinely guided from passive reception to active inquiry, mastering mathematical principles spontaneously and thoroughly while solving practical engineering problems. Teaching practice results clearly demonstrate that this model helps enhance students' geometric intuition, computational thinking, and knowledge transfer abilities, thereby stimulating their learning interest. Consequently, it serves as a replicable and scalable paradigm for reforming fundamental mathematics courses within the context of New Engineering education.

Keywords

Linear Algebra, Teaching Reform, Linear Transformation, Computer Graphics, Project-Based Learning (PBL), Visualization in Teaching, Homogeneous Coordinates

1. 引言：困境与机遇

线性代数是现代科学技术的基础工具，在人工智能、计算机视觉等诸多领域至关重要。其中，线性空间与线性变换是课程体系的核心，亦是最为抽象的部分。传统教学模式存在明显局限：概念表述公理化、符号化，缺乏几何直观支撑；知识点呈现较为孤立，与前后章节及专业应用脱节；学生学习过程被动，难以建立知识间的意义联结[1]。一项针对我校 300 名工科生的问卷调查显示，超过 75%的学生认为该章节最难理解，超过 80%的学生不清楚其实际应用价值。这种认知隔阂制约了学生数学素养与工程能力的协同发展，亦难以满足新工科人才培养对"解决复杂工程问题能力"的要求[2]。

近年来，成果导向教育(OBE)、项目式学习(PBL)及信息技术与教育的深度融合，为教学改革提供了明确思路[3] [4]。将计算机图形学案例引入线性代数教学具有内在合理性：图形的基本几何变换(如平移、旋转、缩放)是线性与仿射变换的直观实例；图形渲染管线以矩阵运算为核心；特征值分解在图形压缩等领域有直接应用[5]。因此，图形学可为抽象数学概念提供"可视化、可操作"的现实载体[6]。

在可视化教学与项目式学习方面，已有较多探索。国内研究侧重于通过几何动画[7]、编程实践[8]等手段提升直观理解；国外研究则强调通过跨学科项目(如计算机图形学、数据分析)来衔接理论与应用[9] [10]。然而，如何系统性地以图形学项目贯穿整个线性变换模块，并设计可评估的进阶实践任务，仍有深入探索的空间。

基于此，本文设计了一项为期两学年的教学改革，提出了以“计算机图形学”为主线、以“项目实践”为驱动、以“可视化编程”为手段的创新教学模式，并系统阐述其设计、实施与评估，以期为同类课程改革提供参考。

2. 教学创新设计：理念、框架与重构

(一) 核心理念：从“知识传授”到“意义建构”

本改革摒弃“教师中心、教材中心、课堂中心”的传统范式，转向“学生中心、问题中心、实践中心”的新范式。核心理念是：数学概念不应作为现成结论被灌输，而应作为解决实际问题的工具被学生主动发现和建构。为此，我们确立了三条设计原则：

(1) 情境真实性原则：学习任务必须来源于真实的工程或科学问题，具有明确的应用价值。

(2) 认知可视化原则：抽象的数学关系必须通过图形、动画、交互程序等手段转化为直观的感知体验。

(3) 实践探究性原则：学生必须通过动手操作(编程、实验)来验证猜想、发现规律、建构理解。

(二) 整体框架：“四阶学习闭环”模型

从所论的基本思想出发，建立了“现象感知－数学建模－编程实现－应用反思”的四阶螺旋式学习闭环，因而很好地把理论学习与实践探索结合起来。

- 第一阶段：从现象感知入手，用 3D 动画、Photoshop 中自由变换的图像处理软件及简单 AR 应用诸种方式让学生切实感受“图形变换”现象，由此引出核心驱动问题：“计算机如何精确、高效地控制这些变换？”。
- 第二阶段：用数学建模的方法把图形变换问题抽象为数学语言：先从点的坐标变换入手引出向量及向量空间的概念，再从变换的“保持直线性”和“比例不变性”出发归纳出线性变换的代数定义，由此导出变换的矩阵表示。因此这是十分典型的从具体到抽象的飞跃。
- 第三阶段：学生用 Python (NumPy, Matplotlib, PIL)或 MATLAB 把上一阶段所得的数学公式写成程序，对真实图像或三维模型施以变换操作，利用变换过程中的即时可视化结果来直接检验数学模型的正确性，再由此解决边界、插值诸种工程问题。因此这是从抽象回到具体的示范。
- 第四阶段：从程序运行结果出发做系统的应用反思，讨论矩阵乘法的顺序性(复合变换)，逆矩阵的几何意义(复原变换)，特征向量的物理意义(变换主轴)，由此顺理成章地完成知识升华。

(三) 教学内容的重构：从“理论逻辑”到“应用逻辑”

由于教材中所论的线性空间及线性变换的内容可以用图形学应用的内在逻辑来组织，因此作了相应的调整融合。

(1) 向量空间作为“坐标舞台”：由于抛弃了从八条公理出发的传统讲法，因此可以定义和为所有像素坐标或三维顶点坐标的集合，而其加法、数乘运算正好可以解释为空间中图形的平移、缩放操作：把图像上所有点的坐标都加上某向量$\left(t_x,t_y\right)$，即为平移。

(2) 线性变换作为“图形变形器”：这是教学的枢纽，因此提出一个自始至终的探究问题：“如何用统一的数学工具描述对一幅图像的任何线性变形？”，由此引出：任何复杂的线性变形都由其对两个标准基向量$\boldsymbol{e}_1=\left(1,0\right)^{\mathrm{T}}$和$\boldsymbol{e}_2=\left(0,1\right)^{\mathrm{T}}$的作用完全确定，若变换后两基向量分别变为$\boldsymbol{a}_1$和$\boldsymbol{a}_2$，那么平面上任一点$\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$变换后都变为$x\boldsymbol{a}_1+y\boldsymbol{a}_2$。把$\boldsymbol{a}_1$和$\boldsymbol{a}_2$并排写出，就得到了变换矩阵$A=\left[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\right]$。因此学生能真正“发现”核心定理：$T\left(\boldsymbol{v}\right)=A\boldsymbol{v}$。更难得的是，矩阵的每一列都有了十分清楚、扎实的几何起源。

(3) 基本变换矩阵的“几何推导”：学生分组，运用上述“基向量追踪法”，自主推导出图形学中最常用的变换矩阵：

◆ 缩放：$S\left(s_x,s_y\right)=\begin{pmatrix} s_x & \\ & s_y \end{pmatrix}$。基向量分别沿坐标轴拉伸。

◆ 旋转：$R(\theta)=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$。结合单位圆上点的坐标定义，推导过程复习了三角函数。

(4) 认知冲突与概念飞跃：齐次坐标的引入：

◆ 制造冲突：让学生试着求平移变换 $T(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$ 的一个 2×2 矩阵 A，使 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$ 对所有向量 $\boldsymbol{x}$ 都成立。由此导出结论：这是不可能的，因为 $A\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}\neq\boldsymbol{b}$，因此学生意识到“平移不是线性变换”。

◆ 解决方案：先系统、有层次地介绍计算机图形学先驱所发明的齐次坐标，由此导出二维点用三维向量表示的方法及平移的矩阵实现。将二维点 (x,y) 表示为三维向量 $(x,y,1)$。平移操作可以用一个 3×3 矩阵完美实现：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+t_x \\ y+t_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

◆ 几何解释：由于齐次坐标把二维平面“嵌入”到三维空间 $z=1$ 的平面上，故平移在三维空间中可以看作错切变换，而错切又是线性变换，因此这是解决非线性问题时升维线性化的范例，也利于开拓学生的数学视野。

(5) 特征值与特征向量：寻找“变换的不动轴”，学生对各种变换已经有一定的直观体验，在这基础上问学生是否存在变换之后方向不变的特殊方向(只改变方向的长度)？在学生编程绘制变换前后网格的基础上，让他们用眼睛寻找“主轴”。接着引入特征向量 $\boldsymbol{v}$、特征值 λ 的概念，要使 $A\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}$，则称 $\boldsymbol{v}$ 是矩阵的一条特征向量，λ 是对应于该特征向量的特征值。即缩放矩阵的特征向量就是坐标轴的方向，也就是“变换的不动轴”；而旋转矩阵(转角不是 $0,\pi$)在实数域内是没有特征向量的，因此旋转就将所有方向都改变了。“特征值从是一个数值变成描述一种变换内在性质的‘物理量’。”

3. 核心教学案例详述

案例一：二维图像的基本变换与合成

由于要把所谈的设计真正落到实处，因此本文设计了两个层次分明又彼此衔接的实践项目案例作为学生知识建构的脚手架。

- 项目任务：每位学生要编写一个 Python 图像处理模块，对输入的灰度图像(以 NumPy 数组形式 $I_{m\times n}$ 给出)做旋转、缩放、剪切诸种基本变换，其基本思路十分清楚：即把图像中各像素的坐标 (x,y) 用相应的变换矩阵加以变换 A，由此求得新图像中各像素的位置 $(x',y')^{\mathrm{T}}=A(x,y)^{\mathrm{T}}$。数学知识汇总：

(1) 线性变换的矩阵表示。

(2) 逆变换：由于要作有效的逆向映射(从输出图像像素去寻找输入图像对应点)，故首先要计算变换矩阵的逆 A^{-1}，由此引出其几何意义即“还原变换”。

(3) 变换的复合与顺序：由于实现“绕图像中心旋转”功能要用到三个变换矩阵的复合，因此要让学生弄清矩阵乘法从右往左执行的规则，同时充分认识其不可交换性：先平移后旋转与先旋转后平移所得结果不同。

核心代码示例(片段)

```
import numpy as np
from PIL import Image
```

```
import matplotlib.pyplot as plt

def affine_transform(image, matrix):
    """
    对图像进行仿射变换。
    image: PIL Image 对象或 NumPy 数组。
    matrix: 3×3 齐次坐标变换矩阵。
    返回：变换后的图像(NumPy 数组)。
    """
    # 转换为数组并获取尺寸
    img_array = np.array(image)
    h, w = img_array.shape[:2]
    # 生成输出图像网格坐标(齐次坐标)
    x, y = np.meshgrid(np.arange(w), np.arange(h))
    ones = np.ones_like(x)
    coords = np.stack([x, y, ones], axis=-1) # 形状 (h, w, 3)
    # 计算逆变换，进行逆向映射
    inv_matrix = np.linalg.inv(matrix)
    # 将坐标展平以进行批量矩阵乘法
    coords_flat = coords.reshape(-1, 3).T # 形状 (3, h*w)
    src_coords = inv_matrix @ coords_flat # 形状 (3, h*w)
    # 归一化齐次坐标，并取前两维(原图 x, y 坐标)
    src_x, src_y = src_coords[0, :] / src_coords[2, :], src_coords[1, :] / src_coords[2, :]
    src_x = src_x.reshape(h, w).clip(0, w-1)
    src_y = src_y.reshape(h, w).clip(0, h-1)
    # 双线性插值(此处为简化，使用最近邻插值示例)
    src_x0 = np.floor(src_x).astype(int)
    src_y0 = np.floor(src_y).astype(int)
    # 确保索引不越界
    src_x0 = np.clip(src_x0, 0, w-2)
    src_y0 = np.clip(src_y0, 0, h-2)
    # 获取像素值
    if len(img_array.shape) == 3: # 彩色图像
        transformed = img_array[src_y0, src_x0, :]
    else: # 灰度图像
        transformed = img_array[src_y0, src_x0]
    return transformed

# 示例：绕图像中心旋转 30 度
```

```
angle = np.radians(30)
cos_a, sin_a = np.cos(angle), np.sin(angle)
# 构建绕原点旋转矩阵(齐次坐标)
R = np.array([[cos_a, -sin_a, 0],
              [sin_a,   cos_a, 0],
              [0,        0,      1]])
# 计算将图像中心平移至原点的矩阵及反平移矩阵
cx, cy = w/2, h/2
T1 = np.array([[1, 0, -cx],
               [0, 1, -cy],
               [0, 0, 1]])
T2 = np.array([[1, 0, cx],
               [0, 1, cy],
               [0, 0, 1]])
# 复合变换矩阵：先平移到原点，旋转，再平移回原中心
M = T2 @ R @ T1
# 执行变换
result = affine_transform(img_array, M)
# 显示结果
plt.subplot(1,2,1); plt.imshow(img_array); plt.title('原图')
plt.subplot(1,2,2); plt.imshow(result); plt.title('绕中心旋转 30 度后')
plt.show()
###########代码结束#######################
```

效果对比图：

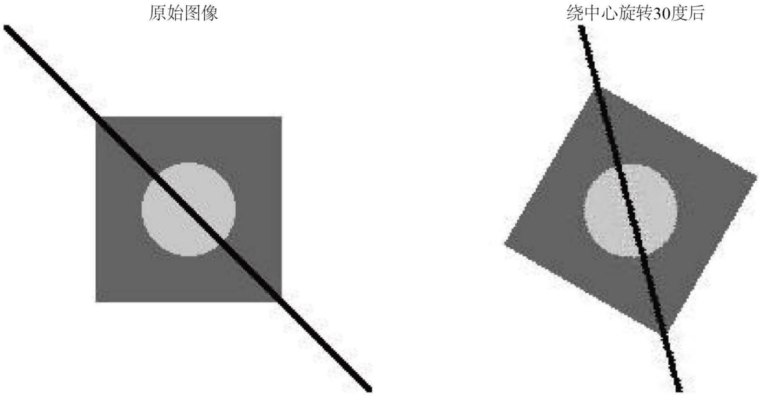

Figure 1. (Left): Original grayscale "Lena" test image; (Right): Result after applying the above code to rotate the image 30 degrees about its center using bilinear interpolation

图 1. (左)：原始灰度“Lena”测试图像；(右)：应用上述代码绕图像中心旋转 30 度并采用双线性插值后的结果

- 探究性问题引导：

  (1) 为什么使用逆变换进行反向映射，而不是直接向前映射？

(2) 当旋转角度为 90 度时，输出图像的尺寸应该如何变化？矩阵如何体现这一点？

(3) 尝试对彩色(RGB)图像进行变换，矩阵运算需要做何调整？

案例二：三维模型视图变换

- 任务：使用 Python (如 Matplotlib 的 3D 轴或 Vtk 库)或 MATLAB，加载一个三维网格模型(如.obj 文件)，并实现其在世界空间中的平移、旋转、缩放以及简单的透视投影变换，最终在二维屏幕上显示。
- 教学细节

1) 模型与表示：三维模型由顶点列表($V \in R^{N\times3}$)和面片列表定义。所有变换作用于顶点坐标。

2) 齐次坐标的扩展：将三维顶点$\left(x,y,z\right)$表示为四维向量$\left(x,y,z,1\right)$。所有变换矩阵为 4×4。

3) 基本变换矩阵

◆ 缩放：$S\left(s_x,s_y,s_z\right)=diag\left(s_x,s_y,s_z,1\right)$。

◆ 平移：$T\left(t_x,t_y,t_z\right)=\begin{pmatrix}1 & & & t_x\\ & 1 & & t_y\\ & & 1 & t_z\\ & & & 1\end{pmatrix}$。

4) 变换合成：模型变换(Model Transformation)通常是缩放、旋转、平移的复合。视图变换(View Transformation)通过相机位置、朝向和上方向量计算。

5) 简单透视投影：引入透视投影矩阵P，将视锥体内的 3D 点投影到 2D 标准化设备坐标(NDC)。这是一个从四维到三维的变换(通过除以w分量实现)。

- 核心挑战与学习点：理解 4×4 齐次坐标矩阵如何统一表示三维空间中的线性变换(旋转、缩放)与仿射变换(平移)，以及透视投影的非线性如何通过除以w分量(由投影矩阵产生)来实现。学生需编程实现矩阵栈(Matrix Stack)来管理复杂的嵌套变换。

4. 教学实施过程与策略

课程总学时 64，其中线性空间与线性变换模块分配 10 学时，采用“线上理论铺垫 + 线下精讲探究 + 课后项目实践”的混合模式。

(1) 课前准备阶段(线上，2 学时)：

- 在课程平台发布预习包，包含：图形变换的科普短片；交互式 WebGL 演示页面，学生可拖动滑块改变矩阵参数，实时观察网格变形；一篇介绍齐次坐标的通俗技术博客；Python/NumPy 基础绘图教程。
- 发布课前思考题：从“用手机拍一张照片，在相册编辑中将其旋转 10 度并放大。”从这一事实出发，提出一个问题：手机软件内部作了哪些数学计算？

(2) 课堂精讲、探究诸环节属于课堂线下教学部分，故宜表述为课堂精讲及探究阶段(线下，4 学时)：

- 第一讲(2 学时)：从课前思考题入手，先让学生用数学语言表述“旋转放大”，再以 GeoGebra 动画演示标准基向量的变化，由此导出旋转、缩放矩阵，最后引出线性变换的定义及矩阵表示定理。
- 第二讲(2 学时)：从“平移难题”入手，先让学生经历尝试、失败的过程，再引入齐次坐标，说明它怎样很好地统一了线性变换与平移，由此引出三维到二维投影的例子，进而过渡到矩阵。

(3) 项目实践与指导阶段安排在课后及实验课中，共 4 学时。

- 由于学生完成案例一(个人项目)有 2 周时间，故安排 2 学时的机房实验课，教师及助教当面辅导矩阵运算、坐标映射、插值算法诸种内容。
- 由于案例二被选为团队挑战项目，故其在课程后半段发布，由学有余力的学生小组(3~4 人)自愿选用，同时配有线上提示。

(4) 成果展示与评价阶段：

- 举办“线性变换视觉展”，展示优秀的学生图像变换作品和三维查看器。
- 将项目报告、代码质量、创新性纳入课程总评，占比 30%。报告要求详细阐述所用到的线性代数原理。具体评价量规如下：

评价维度	优秀(A)	良好(B)	合格(C)	待改进(D)
原理阐述准确性(30%)	准确、清晰阐述所有涉及的线性代数概念(变换矩阵、逆、复合、齐次坐标)。	能阐述主要概念，个别细节表述不清。	能复述基本概念，但理解表面，存在错误。	原理阐述存在重大错误或缺失。
代码实现完整性与正确性(30%)	代码完全实现要求功能，结构清晰，注释完整，无运行错误。	主要功能实现，代码可运行，但可能存在小 bug 或局部瑕疵。	仅实现部分基本功能，代码存在较多错误或结构混乱。	代码无法运行或与任务要求严重不符。
可视化效果与报告呈现(20%)	变换结果图像/模型正确、视觉效果佳；报告图文并茂，逻辑清晰。	结果基本正确，视觉效果一般；报告结构完整。	结果有可见错误；报告撰写粗糙。	无有效结果或报告。
创新性与拓展性(20%)	在基础要求外，自主实现额外功能(如自定义插值算法、组合变换动画、GUI 交互)，或对原理有深入分析与探讨。	对基础任务进行了合理的个性化微调或尝试了简单拓展。	仅完成规定的基础任务，无任何拓展。	未完成基础任务。

5. 结论与展望

本文对线性代数教学中长期存在的诸种问题作了十分清楚、有层次的分析，因而能提出以“计算机图形学”为锚定应用、以“项目实践”为认知工具的教学改革模式，又借助“四阶学习闭环”及两个递进式实践案例，把线性空间、线性变换的抽象理论很好地转化为学生可操作、可观察、可解决的具体工程问题，真正实现知识、能力、价值三者的有机统一。

实践表明，该模式能有效：从化解抽象、用图形建立几何直观入手，再谈贯通学用、在实际项目中体会数学的工具价值，继而引出激发潜能、在创造中培养计算思维及创新能力，因此给出了新工科背景下重塑基础数学课程以支撑卓越工程人才培养的具体思路。

今后改革必然要向纵深推进，具体有三个十分明确、彼此衔接的方面：第一是建设开源、模块化的教学案例库及在线实验平台，把图像处理、物理模拟诸种应用都纳入其中，切实服务更多师生。第二是主动与“虚拟现实(VR)编程”结合，让学生在虚拟现实环境中直接“操纵”线性空间，由此获得更充分、更直观的数学直觉。第三是促进各院系协作，就电子、机械、生物诸专业开发有专业特色的线性代数应用案例集，真正实现基础课与专业课的有效融合。

由于教育的根本目的不仅是灌输知识，而是点燃思想，因此让学生看到矩阵在屏幕上画出漂亮的图形，又在代码中成功调通一个复杂变换时，其所得的不仅是线性代数的知识，更会有数学描写世界、改造世界的无穷魅力的真切感受，这也是教学改革中我们始终明确、一贯追求的目标。

参考文献

[1] 李清华, 王宝娟. 线性代数知识点的可视化教学设计探索与实践[J]. 大学数学, 2024, 38(2): 112-119.

[2] 顾佩华, 胡文龙, 林鹏, 等. 基于“学习产出” (OBE)的工程教育模式——汕头大学的实践与探索[J]. 高等工程教育研究, 2014(1): 27-37.

[3] Spady, W.G. (1994) Outcome-Based Education: Critical Issues and Answers. American Association of School Administrators.

[4] Prince, M.J. and Felder, R.M. (2006) Inductive Teaching and Learning Methods: Definitions, Comparisons, and Research Bases. *Journal of Engineering Education*, **95**, 123-138. https://doi.org/10.1002/j.2168-9830.2006.tb00884.x

[5] Salomon, D. (2011) The Computer Graphics Manual. Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-85729-886-7

[6] Strang, G. (1988) Linear Algebra and Its Applications. *Mathematics of Computation*, **30**.

[7] 姚文琦. 以 OBE 概念为基础数字赋能的线性代数教学改革[J]. 智库时代, 2025(6): 155-157.

[8] 王晓明, 朱一心. 基于 STEM 教育理念的线性代数可视化教学实践[J]. 首都师范大学学报(自然科学版), 2020, 41(1): 62-66.

[9] Pecuch-Herrero, M. (2000) Strategies and Computer Projects for Teaching Linear Algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology*, **2**, 181-186.

[10] Hmelo-Silver, C.E. (2004) Problem-Based Learning: What and How Do Students Learn? *Educational Psychology Review*, **16**, 235-266. https://doi.org/10.1023/b:edpr.0000034022.16470.f3