**College and Job** 职业教育发展, **2026, 15(5), 40-47**
Published Online May 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ve
https://doi.org/10.12677/ve.2026.155206

# 以认知理论指导 探究分阶段教学

## ——以数列数学模型为例

**王耀晨，周凤燕**

绍兴大学数理信息学院，浙江 绍兴

收稿日期：2026年3月18日；录用日期：2026年4月30日；发布日期：2026年5月9日

## 摘 要

**针对高中生数列建模能力培养中存在的"抽象困难"与"应用脱节"问题，提出分阶段的教学策略。通过具象感知、抽象建构、形式化应用三个阶段的梯度设计，结合数列模型的典型案例(等差数列、等比数列)，阐述如何通过认知策略(如具身操作、问题链引导、元认知反思等)促进学生数学建模能力的螺旋上升，从而使学生的核心素养得到提升。**

## 关键词

数列，认知策略，分阶段教学，数学建模，核心素养

# Guided by Cognitive Theory to Explore Phased Teaching

## —A Case Study of Sequence Mathematical Models

**Yaochen Wang, Fengyan Zhou**

School of Mathematics, Physics and Information Science, Shaoxing University, Shaoxing Zhejiang

Received: March 18, 2026; accepted: April 30, 2026; published: May 9, 2026

## Abstract

**Aiming at the problems of "abstraction difficulty" and "disconnection from application" in cultivating high school students' sequence modeling ability, this paper proposes a phased teaching strategy. Through the gradient design of three stages: embodied perception, abstract construction and formal application, and combined with typical cases of sequence models (arithmetic sequence and geometric sequence), it expounds how to promote the spiral improvement of students' mathematical modeling**

文章引用: 王耀晨, 周凤燕. 以认知理论指导 探究分阶段教学[J]. 职业教育发展, 2026, 15(5): 40-47.
DOI: 10.12677/ve.2026.155206

**ability through cognitive strategies (such as embodied operation, problem chain guidance and meta-cognitive reflection), thus enhancing students' core competencies.**

## Keywords

**Sequence, Cognitive Strategy, Phased Teaching, Mathematical Modeling, Core Competencies**



## 1. 引言

“数列”选自人教 A 版数学选择性必修第二册第四章，是代数领域的重要内容，是对函数、方程思想在离散范畴的具体应用与延伸，高中数列数学模型更是连接抽象数学知识与现实离散现象的重要建模载体，在刻画人口增长、金融还款、规律变化等实际问题中具有重要价值。但教学实践中，学生常因数列知识的抽象性、递推逻辑的复杂性以及模型建构的综合性，对数列学习产生明显畏难情绪，难以真正理解数列模型的本质内涵。同时，学生对数列数学模型的整体把握能力不足，在解决数列问题时，往往只停留在公式套用层面，综合应用能力、逻辑推理能力以及模型迁移能力均有待提高[1]。除此之外，现有相关研究多聚焦于数列数学模型的解题技巧总结与题型训练，而忽视了学生数学建模能力形成的认知发展规律，未能将认知理论与数列建模教学深度融合，导致教学中难以突破“教师教模型，学生套公式”的浅层学习困境。国内外数列教学、数学建模能力培养、认知理论在数学教育中的应用均有丰硕研究成果，且三者交叉融合成为数学教育研究热点，但各领域及交叉研究仍存不足：国外数列教学有扎实认知理论支撑和多元教学模式，却轻建模高阶培养、过度依赖技术；国内数列教学破解了部分教学难题，但存在研究范围受限、重技巧轻建模本质的问题。数学建模培养方面，国外理论与评价体系成熟，但数列建模专项层级化策略匮乏；国内虽关注建模教学问题，但复杂建模任务落地难，数列建模仅停留在简单公式应用。认知理论应用上，国内外均有实践探索，但多为单一理论浅层应用，缺乏整合设计，且在数列建模教学中无实操量化工具，理论与实践融合不足。

针对上述问题，本研究以 SOLO 分类理论为核心，整合皮亚杰认知阶段理论、双编码理论等多认知理论，构建“具象感知 – 抽象建构 – 形式化应用”的数列建模分阶段教学策略，结合经典案例与挑战性案例设计，实现认知理论与教学实践的深度融合，同时开发 SOLO 层级评价量规，实现数列建模能力的可测量评估，以期解决学生数列建模“抽象困难”与“应用脱节”问题，推动数列教学从技巧传授向素养培育转型，为高中数学建模教学提供理论与实践参考。

## 2. 数列数学模型的特殊性

### 2.1. 数列数学模型的核心特征

数学建模对学生的知识掌握、技能形成、能力提高及观念养成等综合数学素养的培育具有重要作用，被喻为“沟通现实世界与数学世界的桥梁与纽带”[2]。数学建模的内涵是通过数学语言对现实问题抽象并构建数学模型来揭示其内在规律，而数列数学模型作典型代表，其核心是借助递推关系或通项公式刻画离散现象的变化规律。数列数学模型的特殊性体现在：(1) 离散性特征。该特征导致数列数学模型不同于其他连续模型。(2) 递归性特征。该特征要求学生具备逆向思维与逻辑推理能力。(3) 多维度整合性特

征。该特征决定了数列数学模型要融合代数、几何等多个领域的知识。(4) 跨学科应用特征。该特征强化了数列数学模型与其他学科(如信息技术等) [3]之间的关联。

### 2.2. 数列数学模型的认知挑战

由于数列数学模型的特殊性，导致该模型具有抽象性，学生学习具有一定难度，难以迁移到其他模型中。同时数列数学模型的特殊性又与分阶段培养策略中的认知发展规律相契合，因此适合采用分阶段培养策略进行针对性教学研究。

## 3. 认知发展理论的指导作用

### 3.1. 皮亚杰认知阶段理论

皮亚杰把儿童的认知发展分为 4 个阶段：感知运动阶段(从出生至 2 岁左右)、前运算阶段(2~7 岁左右)、具体运算阶段(7~12 岁左右)、形式运算阶段(12~15 岁左右)。高中生处于形式运算阶段，具备抽象逻辑思维能力，但仍需具体经验支撑[4]。

### 3.2. SOLO 分类理论

SOLO 分类理论源于皮亚杰认知发展阶段的 SOLO (Structure of the Observed Learning Outcome)分类理论，在思维结构上呈现的前结构、单点结构、多点结构、关联结构以及抽象拓展结构五个由低到高的层次。

SOLO 分类理论对思维层次的划分有助于教师识别和定义核心素养的不同发展阶段，从而设计出具有针对性的教学与评价活动[5]。同时 SOLO 理论也可以帮助教师了解学生的认知水平，设计出具有目的性和针对性的课堂提问，提升课堂教学效率，培养学生的数学思维能力[6]。采用简易的 SOLO 层级评价量规，可以用来评估学生在不同阶段的作答表现，从而使理论应用更加具体化、可测量(见表 1)。

**Table 1.** Simple SOLO level evaluation rubric for sequence mathematical modeling
**表1.** 数列数学建模 SOLO 层级简易评价量表

| SOLO 层级 | 问题理解 | 模型操作 | 结论表达 | 对应教学阶段 |
|---|---|---|---|---|
| 前结构(P) | 无法识别数列规律，混淆基础概念 | 无有效操作，不会整理数据、套公式 | 作答混乱，无合理结论 | 具象感知初期 |
| 单点结构(U) | 识别单一数列规律，理解单个核心概念 | 完成单一操作，依赖提示记录数据/套公式 | 结论正确但片面，无过程或解释简单 | 具象感知中后期 |
| 多点结构(M) | 识别多个数列概念，理解问题多维度 | 完成多项操作，但步骤零散无关联 | 结论正确、过程完整，无逻辑联结 | 抽象建构初期 |
| 关联结构(R) | 整合数列概念，理解模型与现实的内在联系 | 系统化操作，抽象模型、推导验证并多模态分析 | 结论准确，解释清晰，能说明操作与问题的关联 | 抽象建构中后期 |
| 抽象拓展结构(E) | 拓展问题内涵，识别隐藏规律，考虑现实约束 | 模型创新优化，迁移跨学科应用，自主检验合理性 | 结论有创新，阐述优化思路，反思模型局限并提出改进方案 | 形式化应用阶段 |

### 3.3. 其他认知理论

(1) 具身认知理论：强调身体参与对认知的促进作用，通过实物操作(如积木排列、折纸实验等)将抽象数列规律转化为具身经验，降低符号抽象的认知难度。

(2) 双编码理论：主张同时利用言语和非言语表征(如代数公式与几何图形)强化记忆与理解。例如，通过梯形面积公式类比等差数列求和公式，实现抽象概念的多模态编码。

(3) 最近发展区理论：要求教学任务设计需契合学生现有水平与潜在能力之间的差距。如在具象感知阶段提供实物操作支架，逐步过渡到符号化抽象，确保认知发展的连贯性。

(4) 认知负荷理论：学习过程顺应学生的认知规律，关注学生已有的知识储备、思维能力与心理状态，整体建构符合学生的心理发展特点和对新知的认识规律，培养学生思维的深刻性[7]。认知负荷理论通过分解任务复杂度(如具象感知阶段简化抽象过程)来优化外在负荷(如多模态表征)，进而提升核心素养培养效率。

## 4. 数列数学模型分阶段培养策略

分阶段培养策略是基于多个认知发展理论(如皮亚杰认知阶段理论、SOLO 分类理论、具身认知理论等)整合设计的教学策略。其核心依据是通过“具象－抽象－应用”的认知阶梯，进行任务分解并建立认知支架，通过跨学科案例的梯度设计，结合具身操作、元认知监控等工具，系统性解决学生在数列建模中的抽象困难与应用脱节问题，使学生既能理解数列的数学本质，又能灵活迁移到现实生活场景。数列数学模型分阶段培养策略具体分为三个阶段，每个阶段都有不同的认知特点与教学策略。

(1) 阶段 1：具象感知阶段(数列概念形成阶段)。

认知特点：依赖具体情境理解数列规律，难以脱离实际背景进行符号抽象。

教学策略：具象感知——积木搭建梯形数列/折纸倍增实验。

(2) 阶段 2：抽象建构阶段(模型符号化阶段)。

认知特点：能理解符号意义，但需建立模型与现实的映射关系。

教学策略：抽象建构——公式推导与几何类比。

(3) 阶段 3：形式化应用阶段(复杂模型进阶阶段)。

认知特点：能进行多变量分析与模型优化，但需强化元认知监控。

教学策略：形式化应用——剧院座位设计/病毒传播模型设计。

## 5. 教学案例设计

### 5.1. 等差数列模型

(1) 案例背景

① 教学内容：人教 A 版高中数学选择性必修 2“等差数列的前 $n$ 项和”。

② 认知目标：以“具身操作→几何类比→跨学科建模”为路径，实现从简单到复杂的问题解决的认知进阶，重点发展数学抽象、逻辑推理与模型迁移能力。

(2) 分阶段实施步骤

① 具象感知

活动 1 用积木搭建“梯形”形状的数列，观察每层数量变化规律。

师生活动：

教师引导：展示梯形形状的积木堆(底层 5 块，每层递增 2 块，共 3 层)，提问：“如何快速计算总积木数？”启发学生用“倒序相加”的方法(如将梯形倒置与原梯形拼接成平行四边形)。

学生操作：分组用不同数量的积木搭建梯形数列，记录每层数量并计算总数。学生分享发现：“首项 + 末项”乘以层数除以 2。

设计意图 通过具身操作(积木排列)将抽象的数列求和转化为直观的几何问题，降低认知负荷。利用

多模态表征(实物操作 + 图形观察相结合)帮助学生感知等差数列的对称性与求和规律。创设真实、有趣的情境，结合情境教学法，提高学生对数学知识的理解，让学生在轻松、愉快的学习氛围中主动探究，掌握新知识，从而提高课堂学习成效[8]。同时重视基础知识的掌握，进而在面对综合性问题时能灵活运用所学，高效解决问题[9]。

② 抽象建构

活动 2 将积木总数计算转化为“首项 + 末项”乘以项数除以 2 的公式推导。

师生活动：

教师引导：从积木案例过渡到符号化表达：

“若等差数列首项为 $a_1$，末项为 $a_n$，项数为 $n$，总积木的数量 $S_n$ 如何表示？”，引入梯形面积公式 $S = 1/2\times(上底+下底)\times 高$。类比解释 $S_n = 1/2\times(a_1 + a_n)\times n$。引导学生根据 $a_n$ 画出对应函数图象，探究观察函数图象与已学图象类型之间关系。

学生推导：用代数方法验证公式：$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n(a_1 + a_n)\times 1/2$。

根据 $a_n$ 图象发现与一次函数图象之间有联系。

设计意图 通过结构化问题分解(从具体案例到符号公式)，帮助学生建立模型与现实的映射关系。采用双编码教学：结合数列通项公式代数表达式与函数图象，学生通过探究得出等差数列的直线性与一次函数图象对应，强化公式的记忆与理解。同时加强数列与其他知识点交汇融合的练习，如等差数列与等比数列的交汇、数列与不等式、函数、创新定义的交汇[10]，培养学生的创新意识，更好的落实核心素养。

③ 形式化应用

活动 3 用公式解决“剧院座位排数设计”问题，并讨论公式在非整数项情况下的适用性。

师生活动：

教师提问：“某剧院第一排 20 个座位，每排比前排多 2 个，共 15 排。若总座位数需达到 500 个，如何调整排数或递增数？”

学生应用：分组计算原方案总座位数 $S_{15} = 15\times(20+48)\times 1/2 = 510$，讨论调整方案(如减少 1 排或每排递增 1 个)。

反思公式局限性：“若排数为非整数(如 14.5 排)，公式是否适用？为什么？”

设计意图 通过跨学科建模培养复杂问题解决能力。采用对非整数项的讨论来引导学生关注模型假设的现实约束，发展元认知监控能力。通过思维导图梳理建模过程，标注关键步骤的认知难点。

## 5.2. 等比数列模型

(1) 案例背景

① 教学内容：人教 A 版高中数学选择性必修 2“等比数列的前 $n$ 项和”。

② 认知目标：以“具象实验→几何抽象→模型优化”为路径，实现从指数规律感知到模型创新的认知提升，重点发展数据分析、直观想象与科学思维能力。

(2) 分阶段实施步骤

① 具象感知

活动 1 探究折纸层数的指数增长规律。

师生活动：

教师引导：展示对折纸张，提问“对折 1 次层数是 2，对折 2 次是 4，对折 $n$ 次层数是多少？”引入“棋盘麦粒问题”：在棋盘第 1 格放 1 粒麦子，第 2 格放 2 粒，第 3 格放 4 粒，依此类推，第 64 格有多少粒？

学生操作：分组折纸并记录层数变化，用表格整理数据(对折次数 $n$，层数 $a_n$)，观察规律。学生归纳出“后项是前项的 2 倍”，即公比 $r=2$，初步建立 $a_n=2^{n-1}$ 的概念。

设计意图 通过具身操作(折纸鹤)将抽象的指数规律转化为可感知的物理变化，建立等比数列“倍增”的核心概念，避免与等差数列混淆。

② 抽象建构

活动 2 探究正方形面积的指数增长规律。

师生活动：

教师引导：展示边长为 1 的正方形(面积 1)，边长扩大为 2 倍(面积 4)，再扩大为 2 倍(面积 16)，提问“面积变化是否构成等比数列？公比是多少？”引入符号化表达：若首项 $a_1=1$，公比 $r=4$，求第 $n$ 项面积 $a_n=1\times 4^{n-1}$。

学生推导：根据递推关系：

$a_n=a_{n-1}\times r$，结合首项 $a_1$，推导出通项公式 $a_n=a_1\times r^{n-1}$。

对比分析：引导学生对比等比数列与指数函数的图象(离散点 vs 连续曲线)，强调数列的定义域为正整数。

设计意图 通过几何类比建立指数增长的直观模型，结合递推关系推导公式，强化符号意义的理解，通过抽象、推理、归纳、概况等活动，感悟新知识的认知过程，体验数学发现和创造的过程，培养学生思维的敏捷性。

③ 形式化应用

活动 3 用公式解决“病毒传播的数学建模”问题——从通项到前 $n$ 项和的迁移。

师生活动：

教师提问：“某病毒初始感染 1 人，每天感染人数翻倍。若医疗干预使感染增长率降为 50%，如何调整模型？”

学生应用：学生先分组建立基础模型 $a_n=2^{n-1}$，随后发现问题本质是求前 $n$ 项和 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，之后尝试推导等比数列前 $n$ 项和公式(或利用错位相减法)。在增长率调整为 50%时，学生建立优化模型 $a_n=1\times 1.5^{n-1}$，并计算：

$$S_7=1+1.5^1+1.5^2+\cdots+1.5^6\ .$$

讨论模型假设的局限性：“如果人群免疫导致增长率递减，如何修正模型？”

设计意图 通过真实问题驱动，培养模型迁移能力与批判性思维，学会用数学的眼光观察事物的个性与共性，学会用数学语言严谨地表达事物的一般性规律，培养思维的准确性。

## 5.3. 两种模型对比分析

等差数列模型与等比数列模型在多个方面存在差异，同时又具有一定的联系。在教学过程中，可以引导学生对两者进行对比分析，有助于深化学生对数列数学模型的理解，提升学生数学思维能力。

(1) 规律特征

等差数列的规律是：从第 2 项开始，所有项之差与其前面一项之差为一常数，且呈直线变化。而等差数列的规则是，从第 2 项开始，各项之比与其前一项之比为一常量，表现为指数形式的增减。

(2) 公式推导与理解

等差数列前 $n$ 项和公式的推导采用倒序加法，将它与梯形面积公式进行类比，由特定的积木实例切入，有助于学生理解该公式的含义。教师引导学生在这个过程中把它与一次函数的图象联系起来，从而

加强对这些公式的记忆和了解。而等比数列的前 $n$ 项和公式是根据递归关系，并与首项相结合来获得的。在推导的时候，通过比较等比数列和指数函数的图象，突出等比数列的定义域是正整数，从而让学生更好地理解。这两种模型的推导方式的不同，体现了它们逻辑上的区别，同时也对学生们进行了不同的数学思维训练。

(3) 应用场景

等差数列模型常用于解决具有线性变化规律的实际问题，如“剧院座位排数设计”，每排座位数的增加是固定值，通过等差数列公式可以方便地计算总座位数，并对排数或递增数进行调整来启发学生思考。等比数列模型更适用于指数增长或衰减的场景，如“病毒传播的数学建模”，在病毒传播初期，感染人数呈指数增长，利用等比数列公式能够准确地描述和预测感染人数的变化。结合生活实例，学生可以体会到两种模型在解决实际问题中的独特价值。

(4) 认知发展过程

两种模型在认知发展过程中，虽然具体方式不同，但都遵循从具象到抽象、从简单到复杂的认知规律，通过分阶段培养策略可以逐步提升学生的数学建模能力等核心素养。

## 5.4. 探索性递推数列：兔子繁殖问题

(1) 案例核心

无现成公式可套用，需学生自主观察、归纳递推规律，建构非常规数列模型，侧重规律探索、递推思维培养，适配抽象建构和形式化应用阶段的高阶思维训练。

(2) 分阶段实施步骤

① 具象感知

活动 1

问题情境：假设一对新生兔子，出生 2 个月后开始每月生一对小兔子，且所有兔子都存活。第 1 个月有 1 对兔子，第 2 个月仍为 1 对，第 3 个月生 1 对共 2 对，以此类推，记录前 8 个月的兔子对数。

学生操作：分组列表格记录每月兔子总数(新生兔+成年兔)，观察相邻月份数量的关联；教师仅引导数据分类，不提示规律。

SOLO 分析目标 从单点结构→多点结构，能准确整理数据，识别“当月数量 = 上月数量 + 上上月数量”的单一递推特征。

② 抽象建构

活动 2

师生活动：

教师引导：仅针对符号化表达进行点拨，不直接给出递推公式，引导学生区分该数列与等差/等比数列的本质差异。

学生操作：自主归纳递推关系，用符号表示：设 $F_n$ 为第 $n$ 个月兔子对数，则 $F_1 = 1$，$F_2 = 1$，$F_n = F_n - 1 + F_n - 2$ ($n \geq 3$，$n$ 为正整数)；尝试推导前 10 项，验证模型合理性。

SOLO 分析目标 从多点结构→关联结构，能整合数据规律与递推概念，建构完整的递推模型，明确模型的初始条件和递推关系。

③ 形式化应用阶段

活动 3

问题 1 (模型迁移)：某植物园树苗生长，第 1、2 年各 1 棵，从第 3 年开始，每年新长的树苗数为前两年树苗总数，求第 10 年植物园总树苗数。

问题 2 (模型修正)：若兔子繁殖问题中，每对兔子每月仅生 1 对，且出生 3 个月后才开始繁殖，修正递推模型并求第 8 个月兔子对数。

问题 3 (模型反思)：该递推数列在现实中是否存在应用边界？(如兔子存活寿命、资源限制等，说明模型的理想性假设)

学生操作：分组完成模型迁移、修正，讨论模型的现实约束；自主提出 1 个该数列的现实应用场景(如花瓣数、蜂巢结构)。

SOLO 分析目标 从关联结构→抽象拓展结构，能灵活迁移模型、修正递推关系，反思模型的理想性假设并结合现实提出拓展思路。

## 6. 研究结论与展望

通过分阶段培养策略能有效降低数列数学模型的认知负荷，促进学生从具体到抽象、从单一到综合的能力发展。在教学实践中，教师应根据学生认知水平设计差异化任务，避免过早引入符号抽象，并积极结合信息技术工具(如通过 GeoGebra 动态演示数列变化，通过 Desmos 对比数列与函数图象等)来增强认知支持。未来还需进一步细化分层作业设计(如具象感知阶段布置生活数列的观察任务，形式化应用阶段开展跨学科建模项目等)，并通过扩大样本范围、教育实验及长期跟踪验证策略的有效性与实际影响。

## 基金项目

浙江省“十四五”第二批本科教学改革项目——“人工智能驱动下高等数学课程跨学科融合的探索与实践”(项目编号 JGBA2024489)、浙江省高等教育学会 2025 年度高等教育研究课题暨“人工智能赋能教育教学应用研究”——高等数学跨学科数智平台的构建与教学实践(项目编号 KT2025104)、2024 年绍兴文理学院数智课程建设项目——知识图谱课程《高等数学 A》、2025 年绍兴文理学院通识教育金课《高等数学 A1》、2024 年度绍兴文理学院教育教学改革项目——新工科背景下高等数学课程思政教学的探究与实践。

## 参考文献

[1] 康策，沈南山. 高中“数列”单元教学的“问题链”进阶设计[J]. 数理化解题研究, 2025(6): 18-20.

[2] 李保臻，陈国益. 高中数学教科书中数学建模问题情境的比较研究[J]. 数学教育学报, 2022, 31(3): 6-14.

[3] 陈清伟，张蕾，王冰，等. 信息技术与数学融合教学：以数列为例的实证研究[J]. 中国信息技术教育, 2025(6): 86-90.

[4] 李耀光，何小亚. 新课程数学概念“螺旋式”上升编排的认知审视[J]. 数学教育学报, 2010, 19(4): 12-14, 91.

[5] 付亮，朱文辉. SOLO 分类理论：教-学-评一体化设计可行的理论支点[J]. 教育理论与实践, 2025, 45(4): 44-51.

[6] 吴晓月. 基于 SOLO 理论的高中数学课堂提问有效性研究[J]. 科教导刊, 2024(2): 147-149.

[7] 黄勇，林晴岚. 遵循认知规律提升思维品质发展核心素养——以《等差数列概念》第一课时教学为例[J]. 福建教育学院学报, 2023, 24(11): 54-57.

[8] 李小锋. 高中数学概念教学策略探究[J]. 数学学习与研究, 2025(9): 70-73.

[9] 安慧娇. 知识、方法、思想深度融合下的高中数学单元复习——以“等差数列”的复习为例[J]. 数学教学通讯, 2025(3): 14-16.

[10] 戴李一. 数列与其他知识点的交汇融合[J]. 中学数学, 2025(5): 40-41.