

二元函数极值临界问题的分层递进式教学设计

鲁志波¹, 滕吉红¹, 贾瑞玲¹, 邓睿哲²

¹信息工程大学基础部, 河南 郑州

²信息工程大学网络空间安全学院, 河南 郑州

收稿日期: 2026年3月18日; 录用日期: 2026年5月2日; 发布日期: 2026年5月9日

摘要

针对多元函数极值教学中, 学生面临的概念理解模糊、方法应用机械及临界情形处理无序的三重困境, 本文提出“分层递进式”教学设计。该设计将临界问题(即二阶充分条件失效时)的系统化处理作为突破口, 构建了“定义法”、“降维转化法”与“高阶导数法”三个教学层次。第一层次回归极值定义, 通过邻域比较强化直观认知; 第二层次运用坐标变换, 将二元问题降维为一元问题, 渗透转化与化归思想; 第三层次引入泰勒展开, 构建高阶导数判别工具。三个层次相互关联、逐层递进, 旨在突破传统教学中“遇到即放弃”的思维定势, 完善极值判定的知识体系, 并在此过程中培养学生综合运用数学思想方法解决疑难问题的能力, 为创新人才培养提供可操作的教学路径。

关键词

多元函数极值, 临界值情形, 分层递进教学, 转化与化归, 教学设计

A Progressive Teaching Design for Critical Problems of Extreme Values in Binary Functions

Zhibo Lu¹, Jihong Teng¹, Ruiling Jia¹, Ruizhe Deng²

¹Department of Fundamental Sciences, Information Engineering University, Zhengzhou Henan

²College of Cybersecurity, Information Engineering University, Zhengzhou Henan

Received: March 18, 2026; accepted: May 2, 2026; published: May 9, 2026

Abstract

In the teaching of extreme values of multivariate functions, students frequently confront three interrelated predicaments: ambiguous conceptual comprehension, mechanical application of methods,

文章引用: 鲁志波, 滕吉红, 贾瑞玲, 邓睿哲. 二元函数极值临界问题的分层递进式教学设计[J]. 职业教育发展, 2026, 15(5): 56-63. DOI: 10.12677/ve.2026.155208

and unstructured handling of critical cases (*i.e.*, scenarios where the second-order sufficient condition fails). To address these challenges, this paper proposes a “hierarchical progressive” instructional design, which takes the systematic resolution of critical cases as a breakthrough point and constructs three interlinked teaching layers: the “definition-based approach”, “dimension-reduction transformation method”, and “higher-order derivative method”. The first layer revisits the definition of extreme values, reinforcing intuitive understanding through neighborhood comparison. The second layer employs coordinate transformation to reduce bivariate problems to univariate ones, embedding the mathematical ideas of transformation and reduction. The third layer introduces Taylor expansion to develop a discriminant tool based on higher-order derivatives. These three layers are logically connected and progress incrementally, aiming to break the traditional teaching mindset of “abandoning when encountering difficulties”, improve the knowledge system for extreme value determination, and cultivate students’ ability to comprehensively apply mathematical thinking and methods to solve complex problems. This design provides an actionable teaching pathway for the cultivation of innovative talents.

Keywords

Extreme Values of Multivariate Functions, Critical Cases, Layered and Progressive Teaching, Transformation and Reduction, Teaching Design

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

多元函数极值问题是高等数学课程中多元函数微分学的核心内容，是连接一元函数微分学与多元函数积分学的重要桥梁，也是培养学生抽象思维、逻辑推理和问题解决能力的关键载体[1]。同时极值理论为理解和优化复杂系统提供了基础工具，在工程优化、经济决策、机器学习等诸多领域有着广泛而深刻的应用[2]。然而长期的教学实践表明，学生在掌握这一内容时普遍面临三重困境：概念理解的模糊性、方法应用的机械性以及临界情形处理的无序性，严重制约了教学质量的提升和创新人才的培养[3]。

从知识结构分析，二元函数非条件极值判定建立在偏导数计算、Hessian 矩阵构造及二次型正定性判别等多重知识基础之上，认知负荷较高。现行教材普遍采用“一阶条件找驻点，二阶条件定极值”的标准范式，即通过判别式 $\Delta = AC - B^2$ 的符号判定极值类型[1]。这一方法在 $\Delta > 0$ 和 $\Delta < 0$ 时简洁有效，但当 $\Delta = 0$ 这一临界情形出现时，二阶充分条件失效，教材通常仅以“需进一步判断”含糊带过。这种处理方式容易导致学生形成“遇到 $\Delta = 0$ 即放弃”的思维定势，既无法建立完整的极值判定知识体系，更难以培养面对数学疑难问题时主动探究的数学素养。

更重要的是，临界情形的教学缺失反映了数学思维培养的断裂。处理二元函数极值临界问题需要综合运用多种数学思想方法，非常有利于融入数学思想方法开展探究式教学。传统教学将临界问题视为非常规内容而刻意回避，错失了培养学生转化与化归、特殊与一般、有限与无限等数学思想的重要契机。

近年来，很多学者对多元函数极值问题的求解策略和教学设计进行了研究。文献[4]分析了二元函数极值的充分条件与二元函数凹凸性概念之间的联系，阐述二元函数极值条件的几何意义，为求解极值问题提供直观解释。不过，几何解释需要学生具备较强的空间想象能力，且若授课时只讲几何而忽略代数推导不利于严谨数学思维的培养。文献[5]结合考研真题，利用极限的局部保号性给出了一种新的判别方法。文献[6]推广了三元以上函数的极值的判别方法。前者仅适用于函数具有可分离结构，后者的配方法

也仅对部分函数有效,不具备一般性,只适合教学的补充。文献[7]提出了基于张量的最大和最小Z特征值对多元函数极值点进行判定的方法,这里涉及三阶、四阶张量及多重线性代数,对于普通高等数学课程而言过于超前。若在教学中过度强调,可能增加学生的认知负担,甚至冲淡对基本判别法的掌握。这些研究为临界情形处理提供了新思路,从理论上拓展了极值判定的工具箱。然而,这些方法针对临界问题的系统化教学设计研究仍显薄弱,现有论文对此关注仍显不足,缺乏可操作、可推广的教学实施方案。

针对以上教学痛点,本文提出“分层递进式”教学设计理念,将复杂的临界问题拆解为三个相互关联、逐层深化的教学层次:第一层次“定义法”回归极值本质,通过邻域比较建立直观认知;第二层次“降维转化法”运用坐标变换与路径分析,将二元问题转化为一元问题处理,体现转化与化归思想;第三层次“高阶导数法”引入泰勒展开与齐次式分析,构建系统化的判别工具。三个层次既独立成章又内在贯通,形成“基础-拓展-探究”的完整教学链,既符合学生的认知发展规律,又满足不同层次学生的学习需求。

2. 理论基础和教学现状分析

2.1. 二元函数极值判定的理论框架

定义 1 [1] 设函数 $z = f(x, y)$ 的定义域为 D , $P_0(x_0, y_0)$ 为 D 的内点。若存在 P_0 的某个邻域 $U(P_0) \subset D$, 使得对于该邻域内异于 P_0 的任何点 (x, y) , 都有 $f(x, y) < f(x_0, y_0)$, 则称函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 有极大值 $f(x_0, y_0)$, 点 (x_0, y_0) 称为函数 $f(x, y)$ 的极大值点; 若对于该邻域内异于 P_0 的任何点 (x, y) , 都有 $f(x, y) > f(x_0, y_0)$, 则称函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 有极小值 $f(x_0, y_0)$, 点 (x_0, y_0) 称为函数 $f(x, y)$ 的极小值点。极大值与极小值统称为极值, 使得函数取得极值的点称为极值点。

二元函数的极值问题, 一般可以利用偏导数解决。

定理 1 [1] (必要条件) 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 具有偏导数, 且在点 (x_0, y_0) 处有极值, 则有 $f_x(x_0, y_0) = 0$, $f_y(x_0, y_0) = 0$, 即点 (x_0, y_0) 为函数 $z = f(x, y)$ 的驻点。

定理 2 [1] (充分条件) 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内连续且有一阶和二阶连续偏导数, 又 $f_x(x_0, y_0) = 0$, $f_y(x_0, y_0) = 0$, 令 $f_{xx}(x_0, y_0) = A$, $f_{xy}(x_0, y_0) = B$, $f_{yy}(x_0, y_0) = C$, 则 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处是否取得极值的条件如下:

- 1) $\Delta = AC - B^2 > 0$ 时有极值, 且当 $A < 0$ 时有极大值, 当 $A > 0$ 时有极小值;
- 2) $\Delta = AC - B^2 < 0$ 时没有极值;
- 3) $\Delta = AC - B^2 = 0$ 时可能有极值, 也可能没有极值, 还需另作讨论。

这里的判别式也可以表示为 Hessian 矩阵 $H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$ 的行列式。

2.2. 教学现状分析

二阶判别法(Hessian 矩阵判定法)是二元函数极值判定的经典方法, 其优势在于计算简洁、判定直观, 适用于 $\Delta \neq 0$ 的绝大多数情形。但该方法的局限性也十分明显, 核心缺陷的就是当 $\Delta = 0$ 时完全失效, 无法直接判定驻点的性质。

从本质上看, $\Delta = 0$ 的临界情形对应两种核心情况: 一是二阶偏导数均为零($A = B = C = 0$), 此时极值的判定需要依赖更高阶的偏导数; 二是二阶偏导数不全为零, 但 $AC - B^2 = 0$ (即 Hessian 矩阵为半正定或半负定矩阵), 此时驻点可能为极值点, 也可能为鞍点, 无法通过二阶条件直接区分。

结合教学实践和问卷调查结果分析, 学生对这部分内容存在以下局限: 一是概念理解不透彻, 存在“驻点一定是极值点”的错误观点; 二是思维层次较初级, 仅仅机械套用二阶判别法, 转化与化归思想

运用能力薄弱；三是方法体系不完整，缺乏处理临界情形的系统方法，未能形成“本质分析-方法选择-逻辑验证”的完整思维链。而且教材中对判别式为0时“还需另作讨论”，但又没有进一步的说明，这进一步加剧了学生在学习过程中形成“ $\Delta \neq 0$ 可判定， $\Delta = 0$ 不可判定”的错误认知，进而在面对临界问题时产生畏难情绪，甚至直接放弃求解。这是二元函数极值教学中亟待解决的核心问题，也为分层递进式教学设计提供了明确的靶向方向。

3. 分层递进式教学设计的理念与框架

3.1. 设计理念的理论依据

3.1.1. 维果茨基“最近发展区”理论

维果茨基“最近发展区”理论指出[8]，学生的发展分为现有发展水平与潜在发展水平，二者之间的区域即为最近发展区，教学设计的核心是搭建“脚手架”，引导学生从现有发展水平逐步提升至潜在发展水平。

从二元函数极值临界问题的教学实际来看，学生的现有发展水平是：掌握二元函数极值的基本概念，能熟练运用二阶判别法处理 $\Delta \neq 0$ 的情形；潜在发展水平是：理解临界情形的本质，掌握 $\Delta = 0$ 时的系统判定方法，能根据函数特征灵活选择判定方法，形成完整的极值判定能力。

分层递进式教学设计的核心，就是针对学生的最近发展区，搭建梯度化的“脚手架”：基础层(定义法)立足学生现有认知，回归极值本质，帮助学生建立“ $\Delta = 0$ 可判定”的信心；拓展层(降维转化法)引导学生运用转化思想，将二元问题转化为熟悉的一元问题，提升方法应用能力；探究层(高阶导数法)引导学生深入理论层面，构建系统化的判定工具，培养探究能力，逐步实现从现有水平到潜在水平的跨越。

3.1.2. 布鲁姆教育目标分类学

布鲁姆教育目标分类学将教育目标分为认知领域、情感领域与动作技能领域，其中认知领域的目标从低到高分六个层次：记忆、理解、应用、分析、评价、创造[9]。结合二元函数极值临界问题的教学目标，分层递进式教学设计的三层次，恰好对应认知领域的不同目标层次，实现梯度提升。

基础层(定义法)：对应“理解”层次，核心目标是让学生理解极值的本质定义，掌握定义法判定临界情形的基本步骤，能运用定义法处理简单多项式函数的临界问题；

拓展层(降维转化法)：对应“应用”层次，核心目标是让学生掌握降维转化的思想方法，能将二元函数极值临界问题转化为一元函数极值问题，灵活运用直线路径法、极坐标法等方法判定极值；

探究层(高阶导数法)：对应“分析、评价”层次，核心目标是让学生理解高阶导数判定临界情形的理论原理，能分析函数的高阶偏导数特征，评价不同判定方法的适用范围，形成系统化的思维能力。

通过三层次的梯度推进，实现认知目标的逐步提升，兼顾不同层次学生的学习需求，实现“因材施教”。

3.2. 分层递进式教学框架

基于上述理论依据，结合学生的认知规律与教学难点，构建二元函数极值临界问题的分层递进式教学框架，整体分为“问题情境引入-三层次方法教学-方法整合与选用”三个核心环节。该框架的核心逻辑是：以“问题情境”制造认知冲突，激发学生的学习动机；以“三层次方法”搭建梯度化学习路径，兼顾不同层次学生的学习需求；以“方法整合”实现知识体系的建构，提升学生的方法选用能力。整个框架既注重理论严谨性，又兼顾教学实用性，实现“从基础到拓展、从直观到抽象、从方法到思想”的逐步提升。

4. 三层次教学方案的详细设计

4.1. 第一层次：定义法(基础层)

4.1.1. 第一层次设计意图

核心目标：消除学生对临界情形的畏惧心理，建立“ $\Delta=0$ 可判定”的信心；帮助学生回归极值的本质定义，深化对极值概念的理解，突破“仅记忆 Δ 符号规则”的思维定势；掌握定义法判定临界情形的基本步骤，能处理简单多项式函数的临界问题。

设计策略：立足学生现有认知水平，避开复杂的高阶导数与转化技巧，回归极值的本质定义，通过“驻点确认-临界情形判断-邻域函数值比较-结论得出”的简单步骤，让学生直观感受临界情形的判定过程，体会“本质大于规则”的数学思想。同时，通过简单案例的反复练习，强化学生对定义的理解，为后续拓展层、探究层的教学奠定基础。

4.1.2. 第一层次核心原理

极值的本质定义是定义法判定的核心依据，既然二阶判别法失效，就回归极值的本质，通过直接分析去心邻域内函数值与驻点函数值的大小关系，完成判定。定义法的核心优势是直观、易懂，不依赖复杂的计算，能帮助学生快速理解临界情形的判定本质；局限性是仅适用于简单多项式函数，对于复杂函数(如分式函数、指数函数)，邻域内函数值的符号分析难度较大，无法高效判定。

4.1.3. 第一层次典型案例

例 1 求函数 $f(x, y) = x^2 + 4y^2 + 4xy + 2x + 4y + 2$ 的极值。

解 计算函数的偏导数并令其为 0，则有

$$\begin{cases} f_x = 2x + 4y + 2 = 0 \\ f_y = 8y + 4x + 4 = 0 \end{cases}.$$

故满足 $x + 2y + 1 = 0$ 的所有点都是驻点。然后计算函数的二阶偏导数可得 $f_{xx} = 2, f_{yy} = 8, f_{xy} = 4$ ，因此判别式 $AC - B^2 = 2 \times 8 - 4^2 = 0$ ，故二阶判别法失效，需要直接分析函数值。

对原函数进行配方，即 $f(x, y) = (x + 2y + 1)^2 + 1$ ，显然 $f(x, y) \geq 1$ 。在驻点直线 $x + 2y + 1 = 0$ 上，函数值恒为 1，其它点处的函数值均大于 1，所以根据极值的定义可知，这些驻点都是极小值点，极小值为 1。

教学要点：利用非负性简化判定。对于含偶次幂的多项式函数，可利用偶次幂的非负性直接分析 $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ 的符号，降低问题的分析难度，强化学生的直观认知。同时可抛出问题“若函数 $f(x, y) = x^4 - y^4$ ，用定义法如何判定极值？”，引导学生发现定义法在复杂函数中的局限性，为后续拓展层(降维转化法)的引入做好铺垫。

4.2. 第二层次：降维转化法(拓展层)

4.2.1. 第二层次设计意图

核心目标：突破定义法的局限性，培养学生的转化与化归思想，让学生掌握将二元函数极值临界问题转化为一元函数极值问题的方法；熟练运用直线路径法、变量代换、极坐标法、参数曲线路径法等降维方法，判定复杂函数的临界情形；能根据函数特征，灵活选择合适的降维方法，提升方法的应用能力与迁移能力。

设计策略：基于基础层的定义法，引导学生思考“如何简化复杂函数的邻域分析”，引入“降维转化”的核心思想——将二元函数沿特定方向转化为一元函数，通过分析一元函数的极值性质，间接判定

二元函数的极值性质。结合不同函数的特征，分类讲解三种降维方法，通过案例对比，让学生明确不同方法的适用范围与优劣，培养学生方法选用能力。同时，通过警示性反例，强化学生的严谨性思维，避免出现“仅验证有限路径”的错误。这种降维转化的思路，也是解决多元函数极值问题的核心方法，能有效提升学生“多元复杂结构转化”的能力，破解相关思维痛点。

4.2.2. 第二层次方法分类与原理

降维转化法的核心逻辑是“化二元为一元”，通过引入参数，将二元函数转化为关于单一参数的一元函数，利用一元函数极值的判定方法分析一元函数的极值性质，进而推导二元函数的极值性质。根据参数引入方式的不同，分为三种核心方法：

方法 1：变量代换法。通过换元将多元函数转化为一元函数，利用一元函数的极值性质分析。

例 2 求函数 $f(x, y) = 3x + 3y - x^3 - y^3 - 3x^2y - 3xy^2$ 的极值。

解 求偏导并令其为 0，可得驻点分布在两条直线： $x + y = 1$ 或 $x + y = -1$ ，且二阶偏导数满足 $AC - B^2 = 0$ ，故判别法失效。令 $t = x + y$ ，函数可改写为： $f(x, y) = 3t - t^3 = t(3 - t^2)$ ，利用一元函数极值的性质判断可得，当 $x + y = 1$ （即 $t = 1$ ）时，函数取得极大值；当 $x + y = -1$ （即 $t = -1$ ）时，函数取得极小值。

教学要点：当驻点是一条/多条直线，沿这些直线代入函数，简化问题。

方法 2：特殊路径法。在驻点附近取不同光滑路径代入，观察函数在驻点附近的符号：如果存在不同路径使得函数的符号相反，则该驻点非极值点。

例 3 求函数 $f(x, y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$ 的极值点。

解 易得函数的唯一驻点为 $(0, 0)$ ，且在该点处判别式为 0。故取抛物线路径 $x = y^2$ 代入原函数得： $f(y^2, y) = (y^2)^2 - 2y^2 \cdot y^2 + y^4 - y^5 = -y^5$ ，则在驻点 $(0, 0)$ 附近函数的符号随 y 的符号变化而变化（可正可负），故此驻点非函数的极值点。

教学要点：此方法容易误判。如果选取有限条特殊路径都得到函数符号相同，但仍不能排除在其他路径函数符号相反，还需要进一步判断。

方法 3：极坐标变换。令 $x = r \cos \theta$ ， $y = r \sin \theta$ ，则函数 $f(x, y) \Rightarrow F(r, \theta)$ ，观察 $F(r, \theta)$ 对任意 θ 是否保号。例如函数 $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ ，其唯一驻点为 $(0, 0)$ ，函数的极坐标形式为 $f = r^3(\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta)$ ，显然当 $r \rightarrow 0$ 时，函数随 θ 取值变号，故驻点非函数的极值点。

教学要点：极坐标法处理旋转型、齐次型、高次多项式等函数比较方便。且无需逐一验证不同方向，一次性覆盖所有路径，判定效率高、严谨性强。

4.3. 第三层次：高阶导数法(探究层)

4.3.1. 第三层次设计意图

核心目标：突破二阶判别法的局限，构建一套更通用、系统化的极值判定工具，同时引导学生从“应用结论”向“探究原理”转变，培养其理论推导、逻辑分析和严谨论证的能力。

设计策略：以泰勒展开式为核心工具，将二元函数在驻点邻域内展开至高阶，通过分析展开式中“首个非零的高阶项”（低阶非零项，即从一阶、二阶到高阶依次排查，找到第一个不全为零的项）的性质，来判定驻点是否为极值点，让极值判定从“经验性结论”上升到“理论化推导”。

4.3.2. 第三层次核心原理

二元函数在驻点处的极值性，本质由其在驻点邻域内的函数增量 $\Delta f = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ 的符号决定。当一阶、二阶项无法确定 Δf 符号时，需通过更高阶的泰勒项来分析，这一过程需依托泰勒展开式、临界情形特征和明确的判定规则。

设二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内具有直到 n 阶连续偏导数, 且点 (x_0, y_0) 为 $f(x, y)$ 的驻点, 则函数在点 (x_0, y_0) 的泰勒展开式为:

$$f(x_0+h, y_0+k) = \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^m f(x_0, y_0) + R_n$$

$$= f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}Q(h, k) + \frac{1}{6}C(h, k) + \frac{1}{24}F(h, k) + \dots$$

其中 R_n 为 n 阶余项, Q 是二次型, C 是三次型, F 是四次型, 依此类推。

若 Q 正定或负定, 则直接得到极值。若 Q 半正定(或半负定), 则存在使 $Q=0$ 的退化方向。沿这些方向, Q 不起作用, 需考虑更高阶项。沿退化方向分析: 设退化方向为 (h, k) 满足 $Q(h, k)=0$, 将其参数化, 例如令 $h=t \cdot u, s=t \cdot v$, 代入展开式得到关于 t 的表达式。找出第一个非零项(阶数 m), 若 m 为奇数, 则沿该方向函数值变号, 故不是极值; 若 m 为偶数, 则看该项系数的符号。比较所有方向: 非退化方向由 Q 的符号决定, 退化方向由高阶项决定。若所有方向上的增量同号(均正或均负), 则取得极值; 否则为鞍点。

若二次型全为零, 则检查三次型 C 。若 C 非零, 由于三次型是奇次, 必存在方向使函数值变号, 故不是极值。若 C 为零, 则继续看四次型 F , 依此类推, 直到找到第一个非零的 k 次型。判定核心是“找到首个非零的 n 阶偏导数项”, 再通过该 n 阶项对应的齐次式性质, 判定驻点是否为极值点。若 k 为奇数, 则不是极值; 若 k 为偶数, 则需判断该 k 次型是否恒正或恒负(或半正定), 并进一步分析退化方向。

此方法通过逐次展开和方向分析, 最终确定临界点的极值性质。

4.3.3. 第三层次典型案例

下表给出一些在临界点 $(0,0)$ 处二阶判别法失效(Hessian 矩阵行列式为 0)的典型函数, 通过泰勒展开式分析判断极值性质。

函数	泰勒展开主要项	分析	极值结论
$x^4 + y^4$	$h^4 + k^4$	四次型, 恒非负	极小值点
$x^4 - y^4$	$h^4 - k^4$	沿 x 轴为正, 沿 y 轴为负, 符号可变	鞍点
$x^3 + y^3$	$h^3 + k^3$	三次型, 奇次, 沿 x 轴正负变号	鞍点
$(x^2 - y^2)^2$	$(h^2 - k^2)^2$	非负, 沿直线 $h = \pm k$ 为零	极小值点
$x^2 + y^3$	$h^2 + k^3$	二次项 $h^2 \geq 0$, 三次项 k^3 变号, 沿 y 轴负方向得负	鞍点
$x^2 - y^4$	$h^2 - k^4$	沿 x 轴为正, 沿 y 轴为负	鞍点
$-x^2 - y^4$	$-h^2 - k^4$	两项均非正, 总和非正	极大值点
$(x+y)^2 + y^4$	$(h+k)^2 + k^4$	二次型半正定, 退化方向 $h+k=0$, 沿此方向得 $k^4 \geq 0$, 其他方向为正	极小值点
$(x+y)^2 - y^4$	$(h+k)^2 - k^4$	退化方向沿 $h+k=0$ 得 $-k^4 \leq 0$, 其他方向为正, 有正有负	鞍点
$x^2 + 2xy + y^2 + y^5$	$(h+k)^2 + k^5$	退化方向沿 $h+k=0$ 得 k^5 , 奇次变号	鞍点

教学要点: 函数的泰勒展开式计算繁琐, 且判别情形多样, 需要仔细甄别, 注意培养学生利用知识分析问题、解决问题的能力。

5. 结束语

本文针对二元函数极值临界问题的教学设计,为长期被教材忽视的临界问题提供系统的处理策略,完善了二元函数极值的教学知识体系。首先,通过分层递进的设计降低认知门槛,使原本忽视的教学内容转化为可教可学的探究素材。其次,在临界问题的分析过程中渗透数学思想方法,提升学生面对复杂数学情境的问题解决能力,切实贯彻落实核心数学素养培育。教学实践表明,这种递进式结构契合高等数学素养导向的教学改革要求,提升了教学的针对性和实效性,有助于学生建立完整的极值判定知识体系,培养学生转化与化归、特殊与一般等数学思想,实现从“会解题”到“懂原理、善思考”的转变,促进学生的全面发展。

基金项目

信息工程大学教育教学研究课题(项目编号 JXYJ2026C013)。

参考文献

- [1] 同济大学数学科学学院. 高等数学[M]. 第8版. 北京: 高等教育出版社, 2023.
- [2] 张奠宙, 宋乃庆. 数学教育概论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2016.
- [3] Mkhathshwa, T.P. (2021) A Study of Calculus Students' Difficulties, Approaches and Ability to Solve Multivariable Optimization Problems. *International Journal of Education in Mathematics Science and Technology*, **53**, 2987-3014. <https://doi.org/10.1080/0020739x.2021.1927227>
- [4] 佟珊珊, 武瑛. 二元函数极值的充分条件与曲面凹凸的关系[J]. 高等数学研究, 2022, 25(2): 42-44.
- [5] 韩淑霞, 黄永忠, 吴洁. 一类二元函数极值的判别[J]. 高等数学研究, 2018, 21(2): 53-55.
- [6] 马国栋, 赖婷. 一种多元函数无条件极值的求解方法[J]. 教育教学论坛, 2020(25): 297-298.
- [7] 李颖, 倪谷炎. 基于导数张量的多元函数极值点判定[J]. 大学数学, 2024, 40(1): 84-87.
- [8] 维果茨基. 教育心理学[M]. 李维, 译. 北京: 人民教育出版社, 2005: 123-135.
- [9] 布鲁姆, 克拉斯沃尔, 马西亚. 教育目标分类学: 认知领域[M]. 罗黎辉, 译. 上海: 华东师范大学出版社, 2018: 89-102.