College and Job 职业教育发展, 2026, 15(7), 75-82
Published Online July 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ve
https://doi.org/10.12677/ve.2026.157281

Hans汉斯

构建学习进阶 培育核心素养

——以“函数的单调性与导数”为例

宋梦杰，董玉成*

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2026年5月18日；录用日期：2026年6月26日；发布日期：2026年7月3日

摘 要

本研究旨在解决高中数学“函数的单调性与导数”教学中普遍存在的知识点割裂、学生认知跃迁困难等问题。本研究选取人教A版高中数学教材中的对应教学内容作为研究载体，结合学习进阶理论与SOLO分类理论，搭建起针对该内容的分层进阶教学框架，这一框架从学生的经验直观出发(水平一)，通过探究引导建立概念(水平二)，再通过辨析与基础应用建立知识联系(水平三)，然后迁移到含参函数的复杂情境中(水平四)，最终整合体系并应用于解决实际问题和不等式证明(水平五)。本研究明确划定了教学的起点与终点，同时设计了“关系构建”与“导数工具应用”两个维度的进阶路径，以此推动学生完成从静态比较到动态分析的认知转变，在分层推进教学的过程中，逐步落地数学抽象、逻辑推理等数学核心素养的培养目标，帮助学生搭建起完整、系统的知识网络。

关键词

学习进阶，高中数学，核心素养，函数单调性，导数

Constructing Learning Progressions and Cultivating Key Mathematical Competencies

—Taking “Monotonicity of Functions and Derivatives” as an Example

Mengjie Song, Yucheng Dong*

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: May 18, 2026; accepted: June 26, 2026; published: July 3, 2026

*通讯作者。

文章引用: 宋梦杰, 董玉成. 构建学习进阶 培育核心素养[J]. 职业教育发展, 2026, 15(7): 75-82.
DOI: 10.12677/ve.2026.157281

Abstract

This study aims to address the prevalent issues in the teaching of "Monotonicity of Functions and Derivatives" in high school mathematics, such as the fragmentation of knowledge points and students' difficulties in cognitive leap. Taking the corresponding teaching content from the PEP (People's Education Press) Version A high school mathematics textbook as the research carrier, this study combines the Learning Progression Theory and the SOLO (Structure of Observed Learning Outcomes) Taxonomy to construct a hierarchical progressive teaching framework tailored for this content. This framework starts from students' empirical intuition (Level 1), guides concept construction through exploratory guidance (Level 2), then establishes knowledge connections through concept discrimination and basic application (Level 3), further transfers learning to the complex context of functions with parameters (Level 4), and finally integrates the knowledge system to solve practical problems and conduct inequality proofs (Level 5). This study clearly defines the starting point and end point of the teaching, and designs a two-dimensional progressive path consisting of "relationship construction" and "application of derivatives as a tool". In this way, it promotes students' cognitive transformation from static comparison to dynamic analysis. In the process of hierarchically advancing teaching, it gradually implements the cultivation goals of key mathematical competencies such as mathematical abstraction and logical reasoning, helping students build a complete and systematic knowledge network.

Keywords

Learning Progressions, High School Mathematics, Key Mathematical Competencies, Monotonicity of Functions, Derivatives

1. 引言

学习进阶(Learning Progressions)这一理论，刻画了学生在较长时间内探究某一核心主题时，思维方式与认知水平依次进阶、逐级深化的发展路径，能够为一线教师把握学生认知规律、设计分层递进的教学活动，从而提供可参考的核心框架与理论支撑[1]。放到整个高中数学的知识体系里看，函数是贯穿整个中学阶段的核心主线，而单调性，又是函数最基础、最核心的性质，它的学习过程本身，就天然呈现出鲜明的螺旋上升的阶段性特点。

传统的单调性相关教学中，常常会把定义法与导数法割裂成两个相互独立的零散知识点，忽略了学生从静态的两点比较到动态的瞬时分析这一关键的思维跃迁过程，这也就导致不少学生在学习导数的应用内容时，只把它当成一套运算技巧，没办法真正理解这一工具本质逻辑。

基于学习进阶理论，重新梳理“函数的单调性与导数”这部分内容的教学框架，能够帮助学生逐步搭建起从直观感知到抽象概括的认知阶梯，让学生逐步落实数学抽象、逻辑推理、数学运算等这些核心素养，最终实现对相关知识的深度理解和灵活迁移应用。近年来，国内已有研究围绕导数学习的认知障碍、导数相关内容的教材编排逻辑展开了分析[2] [3]，也有学者基于学习进阶理论探索了单调性内容的教学实践路径[1]。但现有研究多聚焦于导数整体概念的宏观分析，或是单一课时的教学调整，针对“函数的单调性与导数”这一核心子内容的单元化进阶设计仍较为匮乏。本研究正是针对这一研究缺口，聚焦

该单元内容，试图弥补现有研究对这一具体核心内容的细化不足，为一线教学提供更具针对性的指导。

2. 进阶框架设计

2.1. 进阶起点

2.1.1. 课标分析

依据《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》的相关要求，本部分内容的核心教学目标可以总结为：结合实例，借助几何直观了解函数的单调性与导数的关系；能利用导数研究函数的单调性；对于多项式函数，能求不超过三次的多项式函数的单调区间[4]。这一目标要求，既承接了学生前期已经掌握的函数性质相关知识基础，又指向了导数作为通用型函数研究工具的应用价值，同时也是学生完成从初等数学思维向高等数学思维过渡的关键节点。

2.1.2. 内容分析

本文的核心研究内容是人教 A 版《数学》(选择性必修第二册)第五章中“5.3 导数在研究函数中的应用”。放到整个导数模块里看，本单元是导数应用部分的首个核心单元，它承接了导数的概念、几何意义与基本运算规则这些前置知识，向后又为函数的极值、最值、零点问题以及不等式证明等后续内容的学习打基础，是整个导数知识模块里的关键节点[2]。

2.1.3. 学情分析

本节课的授课对象是高中二年级下学期的学生，此时的学生已经具备了较为扎实的认知基础：1. 学生已经熟练掌握了基本初等函数的图像与性质，对函数的升降变化趋势已经形成了直观的经验感知；2. 学生已经经历过利用定义法证明单调性的严格训练，能够用严谨的代数语言对函数的单调性进行描述与证明；3. 学生已经初步掌握了导数的概念、几何意义以及基本的求导公式与运算法则，能够独立完成简单函数的求导运算。

学生在这一阶段的进阶学习中，存在着一些典型的困难[3]：1. 学生容易忽视导函数的符号和原函数的单调性之间的关系；2. 在用导数法求解单调区间的时候，学生常常会忽略掉定义域优先这个原则；3. 面对含参函数的单调性问题的时候，学生的分类讨论意识比较薄弱；4. 学生对导数的工具性价值理解不够，常常只会把它当成一个新的解题套路。

2.2. 进阶终点

2.2.1. 知识目标

通过本节课的系统学习，学生应当能够达成以下几方面的知识目标：

1. 能够结合具体实例，理解函数的单调性与导数符号之间的内在关联，准确表述两者之间的逻辑条件，能够清晰辨析“导数恒正”与“导数非负”之间的逻辑差异；

2. 能够掌握利用导数研究函数单调性的一般步骤，熟练求解不含参数函数的单调区间，独立解决简单的函数单调性判断问题；

3. 能够对含参函数的导函数进行系统的分类讨论，准确分析参数取值的变化对函数单调区间的影响，掌握分类讨论的基本逻辑与划分标准；

4. 能够对比定义法与导数法的异同之处，深入理解导数法在研究复杂函数时的独特优势，最后形成对单调性研究的完整方法体系。

2.2.2. 素养目标

结合具体的学习过程，学生能够逐步发展以下几方面的数学学科核心素养：

数学抽象：通过对具体函数的切线斜率、变化率与函数变化趋势的分析，抽象出导数符号与函数单调性之间的一般对应关系，完成从具体实例到一般定理的概括提炼过程；

逻辑推理：能够基于导数的核心意义，严谨推导导数符号与单调性之间的因果关系，在含参问题的分类讨论过程中，构建起“因素穷举－层次划分－不重不漏”的完整推理链条；

数学运算：能够熟练完成各类函数的求导运算，掌握因式分解、通分、解不等式等相关运算技巧，形成规范标准的运算流程，有效提升运算的准确性与效率；

直观想象：能够实现原函数图像与导函数图像的双向互译，根据导函数的符号变化还原原函数的升降变化趋势，借助几何直观深化对两者之间抽象关系的理解；

数学建模：能够将实际问题中的优化、变化分析等现实需求，转化为函数单调性的研究问题，掌握用导数工具解决实际问题的完整建模路径。

2.3. 进阶维度

为了有效推动学生的认知进阶，本节课从两个核心维度出发，设计了对应的学习进阶路径。

1. 关系构建维度：这一维度从学生已有的直观经验出发，引导学生逐步探究并构建起导数符号和函数单调性的内在对应关系，通过对具体实例的分析、一般规律的归纳以及特殊情形的辨析，理解两者之间的逻辑条件。

2. 工具应用维度：在学生掌握了两者的对应关系之后，引导学生将导数作为研究函数性质的通用工具，逐步把它应用到不同类型的问题情境中，让学生掌握用导数工具来分析函数、解决问题的一般方法。

2.4. 进阶水平

本研究以 SOLO 分类理论的认知层级为依据，将整个单元学习的过程分解为五个水平层级：本框架的五个水平分别对应 SOLO 理论中的单点结构、多点结构、关联结构、关联深化、抽象扩展结构。对于每一个层级，我们都设置了对应的学习情境、引导问题和探究活动，从而来引导学生逐步加强对相关内容的认知[5]。

2.4.1. 进阶水平一(经验)：创设情境，感知关联

本层级对应单元教学的第 1 课时的前半段，约 0.5 课时，其教学重点在于激活学生已有的经验，引导学生感知导数符号和函数单调性之间的关系。在这个阶段学生可能容易把个别案例的特点直接推广，忽略了特殊情况。这里对应 SOLO 分类理论的单点结构水平，在这个认知阶段的学生，只能关注到问题的某个直观特征，无法整合更多的信息。

情境引入：展示一次函数、二次函数与正弦函数图像，在这些图像上画出不同点处的切线，并列出对应切线的斜率值。引入物理中的高台跳水案例：某运动员起跳后的高度和时间的函数为 $h(t)$，其速度函数则为 $v(t)=h'(t)$。

问题引导：观察这三个函数的图像，当函数图像整体呈上升趋势时，它的切线斜率存在什么样的共同特点？当图像整体是下降趋势时，切线斜率又会呈现出什么样的特征呢？在高台跳水的例子中，当速度 $v(t)>0$ 的时候，运动员的高度是会增加还是减少呢？当 $v(t)<0$ 的时候呢？当速度为 0 的时候，高度的变化又会表现出什么样的特点呢？结合这两个例子，你能不能尝试猜想一下，函数的单调性和它的导数之间，可能会存在什么样的内在联系呢？

设计意图：通过学生熟悉的函数实例与跨学科的物理情境，激活学生已有的直观经验，让学生从“形”的角度感知切线斜率与函数升降趋势的对应关系，从“数”的角度感知变化率的正负与函数增减的内在关联，帮助学生建立起对两者关系的初步猜想，完成整个进阶过程的第一步经验感知。

2.4.2. 进阶水平二(映射)：探究引导，建构概念

本层级对应单元教学的第 1 课时的后半段与第 2 课时的前半段，约 1 课时，其教学重点是引导学生通过具体的探究活动，从特殊实例归纳出导数与单调性的一般关系，同时可以借助反例去完善概念的严谨性。学生在这一阶段可能难以完成从特殊到一般的抽象归纳，部分学生无法理解反例对完善结论的作用，容易忽略导数非负情形的特殊性。这一层级对应 SOLO 分类理论中的多点结构水平。此时学生能够分别分析每个实例中导数符号与单调性的对应关系，但他们无法将新得到的结论和已有的定义法知识建立联系。

探究情境：给出具体的复杂函数 $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$，引导学生尝试用已经学过的定义法来判断这个函数的单调性。

问题引导：尝试用定义法分析这个函数的单调性，你在作差变形的过程中遇到了什么样的困难？我们能不能用刚才猜想的导数的方法来尝试解决这个问题？先求出这个函数的导数，然后看看导数的符号在不同的区间里存在什么样的变化？根据导数的符号，你能不能得到这个函数的单调区间？对比一下你用定义法尝试得到的结果，两者是不是一致的？你能不能把这个例子的结论推广到一般的函数上？如果函数在某个区间内可导，那么当 $f'(x)>0$ 的时候，函数存在什么样的性质？当 $f'(x)<0$ 的时候呢？那如果 $f'(x)\geq 0$ 呢？比如函数 $y=x^3$，它的导数在 $x=0$ 处为 0，那这个函数在 $\mathbb{R}$ 上的单调性是什么样的？这说明我们之前得到的结论，需要做什么样的补充？

设计意图：通过定义法解决复杂问题时的认知冲突，让学生切实体会到引入导数法的必要性，随后通过具体函数的探究过程，引导学生从特殊到一般，逐步归纳出导数与单调性的一般关系，同时通过反例的辨析，完善结论的严谨性，最后完成从具体实例到一般概念的建构，实现从经验感知到抽象映射的认知进阶。

2.4.3. 进阶水平三(关联)：建立联系，辨析概念

本层级对应单元教学的第 2 课时的后半段，约 0.5 课时，其教学重点是帮助学生搞清概念的逻辑细节，掌握导数法研究单调性的基本操作步骤，同时将新学的导数法与已有的定义法建立关联，完善学生的知识网络。这一阶段学生可能容易忽略定义域的优先性，同时混淆导数符号与单调性之间的充分、必要条件，出现逻辑认知的偏差。这一层级对应 SOLO 分类理论中的关联结构水平。进入这一阶段，学生开始将之前分散的多个信息点整合起来：他们能够厘清导数符号与单调性之间的逻辑关系；同时能够将新学的导数法与已有的定义法进行对比，理解两种方法的适用场景与异同之处。

辨析与基础应用：设置两组针对性的问题，帮助学生厘清概念的细节，建立不同知识之间的关联。

第一组：判断下列表述是否正确，并说明理由：

若 $f'(x)>0$ 在区间 I 上恒成立，则 $f(x)$ 在 I 上单调递增；

若 $f(x)$ 在 I 上单调递增，则 $f'(x)>0$ 在 I 上恒成立；

函数 $y=x^3$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增，因此它的导数在 $\mathbb{R}$ 上恒大于 0；

若在区间 I 上存在 x_0 使得 $f'(x_0)<0$，则 $f(x)$ 在 I 上不是单调递增的。

第二组：求下列函数的单调区间：

$f(x)=x\ln x$；

$f(x)=x-e^x$， $x\in(0,+\infty)$。

问题引导：在求解第一个函数的单调区间的时候，你有没有先考虑它的定义域？为什么定义域在求解单调区间的过程中是需要优先考虑的？第二个函数的导数是 $f'(x)=1-e^x$，它在 $x=0$ 处为 0，这会不会影响函数的单调性？为什么？对比一下你之前学过的定义法，导数法在解决这些问题的时候，有什么

优势呢？

设计意图：通过辨析类问题，帮助学生纠正常见的认知误区，厘清导数与单调性之间的逻辑关系，深化对概念的准确理解；通过基础的应用类问题，让学生初步掌握导数法的基本操作步骤，同时强化定义域优先的基本原则，把新学的导数法与已有的知识建立关联，完善学生对单调性研究方法的整体认知。

2.4.4. 进阶水平四(系统)：应用迁移，内化工具

本层级对应单元教学的第 3 课时的前半段，约 0.5 课时，其教学重点是引导学生将所学的知识应用到较为复杂的问题情境中，掌握含参量函数单调性的分类讨论的方法，实现导函数和原函数的图像互译，理解导数作为研究工具的使用方法。学生在这一阶段可能难以建立较为清晰的分类讨论方法，容易出现分类重复等问题，这一层级是关联结构水平的深化阶段，学生已经能够把整合后的知识点，应用到更加复杂、更加结构化的问题中，他们开始尝试将工具应用到挑战性的任务中。

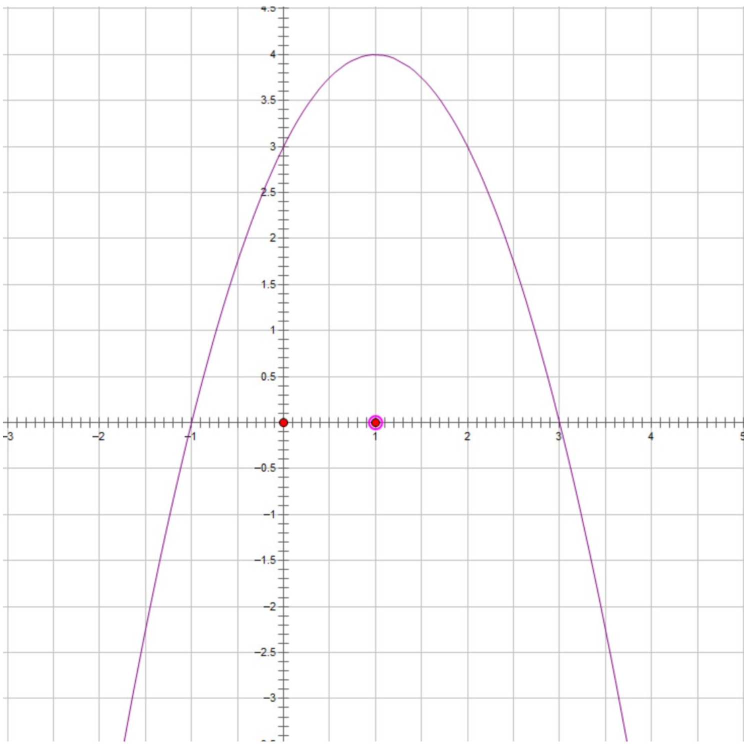

Figure 1. The derivative function of the function $f(x)$

图 1. 函数 $f(x)$ 的导函数

复杂应用情境：给出含参函数的分析问题，以及导函数与原函数的图像互译问题，引导学生进行系统的知识应用。

已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-ax+(a-1)\ln x$，其中 a 为参数，讨论函数 $f(x)$ 的单调性。

已知函数 $f(x)$ 的导函数的图像如图 1 所示，你能不能根据这个导函数的图像，描述原函数的单调区间，以及原函数的大致图像趋势？

问题引导：在讨论含参函数的单调性的时候，我们第一步要做的是什么？在求导之后，我们需要重点分析什么内容呢？对于这个问题，参数的取值会怎么样影响导函数的符号呢？我们应该怎么对参数的取值进行分类呢？那分类的标准又会是什么呢？在进行分类讨论的时候，我们需要注意什么？怎么才能

DOI: 10.12677/ve.2026.157281

做到分类的不重复不疏漏呢？看到导函数的图像，我们怎么把它转化成原函数的单调性的信息呢？导函数的正负分别对应原函数的什么样的变化趋势呢？

设计意图：通过含参函数的分类讨论问题，引导学生把零散的知识系统化，掌握处理较为复杂问题的完整逻辑结构，有效提升学生的逻辑推理与分类讨论能力；通过导函数与原函数的图像的互译问题，强化学生的直观想象能力，帮助学生内化导数作为研究工具的使用方法，从而完成知识的迁移应用。

2.4.5. 进阶水平五(整合)：整合体系，深化认知

本层级对应单元教学的第 3 课时的后半段，约 0.5 课时，其教学重点是帮助学生整合整个单元的知识体系，将导数工具迁移到实际问题与不等式证明这类较为陌生的情境中，加深对导数工具性价值的理解。学生在这一阶段可能难以将陌生的问题转化为函数单调性的研究问题，无法形成统一的认知框架。这一层级对应 SOLO 分类理论中的抽象扩展结构水平。处于这一阶段的学生，已经可以将所学的知识作为研究工具，迁移到陌生的情境中。

综合应用情境：设置综合的实际问题与数学综合问题，引导学生整合整个知识体系，深化对导数工具价值的理解。

某工厂生产某种产品，已知生产 x 件产品的成本函数为 $C(x)=20+10x+0.01x^2$，收入函数为 $R(x)=30x-0.01x^2$，其中 $x>0$。请你分析，产量在什么范围内的时候，工厂的利润是随着产量的增加而增加的？在什么范围内的时候，利润随着产量的增加而减少？

证明：当 $x>1$ 时，$\ln x>\dfrac{2(x-1)}{x+1}$。

问题引导：在第一个实际问题中，利润函数是什么？我们要分析利润的增减变化，其实就是分析什么内容？用导数的方法，我们怎么得到利润函数的单调区间？得到的结论对工厂的生产安排有什么样的指导意义？在证明不等式的时候，我们为什么要构造辅助函数？构造函数之后，怎么利用函数的单调性来证明不等式？学完这节课，你能不能总结一下，我们研究函数单调性，一共有哪些方法？这些方法分别可用于什么样的情况？导数作为研究工具，它的核心价值是什么？

设计意图：通过实际问题，引导学生把数学知识应用到实际情境中，体会导数的工具性价值，从而提升学生的数学建模能力；通过不等式证明的问题，引导学生把单调性知识和不等式证明建立联系；最后通过总结反思，帮助学生形成对单调性的完整认知，从而实现从知识掌握到能力提升的进阶。

2.5. 学业测评

为了检测学生的进阶目标达成情况，本节课设置了以下分层测评任务：

基础任务：求函数 $f(x)=x^3-3x+1$ 的单调区间，检测学生对基础导数法的掌握情况；

提升任务：已知函数 $f(x)=\ln x+ax^2-2x$，讨论 $f(x)$ 的单调性，检测学生的分类讨论能力；

拓展任务：证明：当 $x>0$ 时，$x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(x+1)$，检测学生的知识迁移与综合应用能力。

3. 教学反思

针对“函数的单调性与导数”的五阶进阶教学，各环节都存在不同的学生认知障碍，需要进行针对性的设计调整策略。

经验感知环节，学生可能容易把典型初等函数的特点直接套用到所有函数上，很容易漏掉特殊情况。因此，这个环节中只使用学生熟悉的案例，还需要准备一些特殊的案例。对于基础薄弱的学生，可以引导他们动手画切线、标斜率，从而了解它们之间的基础对应关系；而对于学有余力的学生，可以提前引

导他们思考，我们得到的这个结论是不是对所有函数都成立。

概念建构阶段，部分学生难以理解孤立点的导数为零为何不影响函数整体的单调性。针对这个问题，不能直接告诉学生结论，而需要设计认知冲突，引导学生自主发现问题、改变已有的结论。在分层安排上，对于基础薄弱的学生，可以先去练习具体函数的对应关系，了解基础逻辑；对于基础较好的学生，可以寻找反例，搞清概念边界，加强对概念的理解。

关联辨析环节，学生容易忽略定义域优先的原则、混淆充分必要条件的逻辑关系。针对这些问题，不能只靠教师的强调，需要进行纠错和讨论，引导学生自主理解相关逻辑。对于基础薄弱的学生，可以帮助他们把操作的方法和步骤梳理规范，从流程上帮他们避开那些基础性错误；对于基础较好的学生，可以引导他们自主命题，从而加强其对概念的理解。

系统应用环节，含参函数的分类讨论是教学的难点，学生容易出现分类逻辑混乱的问题，容易发生情况遗漏或重复讨论。针对这个问题，需要设计拆解引导，帮助学生梳理分类的逻辑。对于基础薄弱的学生，可以先从简单题型入手，熟悉基础分类逻辑；对于基础较好的学生，可自主总结分类方法，掌握不重复不遗漏的分类原则，把方法内化为自身的能力。

整合迁移阶段，学生的知识迁移能力可能存在不足，更换情境后，例如面对实际问题或不等式证明问题，难以将问题转化为熟悉的单调性问题。因此，该阶段需要先提炼通用的解题思路，淡化题型套路，然后引导学生抓住问题的本质。对于基础薄弱的学生，可先完成基础练习，熟悉基础的问题转化思路；对于基础较好的学生，可以尝试多种构造方法，拓展解题思路。

整体而言，进阶教学的本质，是为不同认知水平的学生搭建合适的认知脚手架，教学过程中可根据学生的认知状态动态调整，落实因材施教，避免一刀切的教学模式。

参考文献

[1] 陈伟. 基于学习进阶理论培养数学核心素养——以“函数的单调性”教学为例[J]. 中学数学教学参考, 2022(34): 23-25.

[2] 唐恒钧, 蒋逸卿, 郑蓉蓉. 基于两阶段抽象的高中数学教材分析与启示——以人教 A 版“导数的概念及其意义”为例[J]. 数学教育学报, 2025, 34(2): 52-54+76.

[3] 康宝林, 韩源帆, 姬笑笑, 等. 高二学生“导数”学习障碍的调查分析及教学对策[J]. 鞍山师范学院学报, 2025, 27(4): 77-81.

[4] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 39.

[5] 谢雨欣. 高中函数单调性实践案例研究[J]. 数理化解题研究, 2025(7): 68-70.