

“一题多解”在高中数学教学中的 高阶思维培养路径

——以一道三角函数题为例

高国雨

新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2026年6月12日; 录用日期: 2026年8月3日; 发布日期: 2026年8月11日

摘 要

新课标背景下, 数学教学以培育学生数学核心素养为核心目标, 而高阶思维能力是数学核心素养的关键构成, 主要涵盖分析、综合、评价与创造四大思维维度。本文以数学试题探究为载体, 依托一题多解教学模式, 引导学生从多元视角、不同解题路径剖析同一数学问题, 通过对比、评析各类解题思路的优劣与适用场景, 进一步衍生新问题、探究新解法, 创造性地完成问题求解。该教学路径可为中小学数学课堂培养学生高阶思维能力提供实践参考, 助力学生梳理知识脉络、搭建系统化知识框架, 构建完整的数学知识体系。

关键词

核心素养, 一题多解, 高阶思维, 三角函数, 数学教学

The Path of Cultivating Higher-Order Thinking through “Multiple Solutions to One Problem” in High School Mathematics Teaching

—A Case Study of a Trigonometric Function

Guoyu Gao

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: June 12, 2026; accepted: August 3, 2026; published: August 11, 2026

Abstract

Under the background of the new curriculum standards, mathematics teaching aims to cultivate students' core competencies in mathematics, with higher-order thinking ability being a key component, which mainly covers four cognitive dimensions: analysis, synthesis, evaluation, and creativity. Taking mathematical problem exploration as a carrier and relying on the "multiple solutions to one problem" teaching model, this paper guides students to analyze the same mathematical problem from multiple perspectives and different solution paths. By comparing and evaluating the advantages, disadvantages, and applicable scenarios of various solution approaches, students are encouraged to further generate new problems, explore new solutions, and solve problems creatively. This teaching approach can provide practical references for cultivating students' higher-order thinking ability in primary and secondary mathematics classrooms, help students sort out their knowledge context, build a systematic knowledge framework, and construct a complete mathematical knowledge system.

Keywords

Core Competencies, Multiple Solutions to One Problem, Higher-Order Thinking, Trigonometric Functions, Mathematics Teaching

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》指出数学核心素养是具有数学基本特征的思维品质,关键能力以及情感、态度与价值观的综合体现,是在数学学习和应用的过程中逐步形成和发展的。数学学科的核心素养包括:数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析,这些核心素养既相互独立,又相互交融,是一个有机的整体[1]。高阶思维是指发生在较高认知水平层次上的心智活动或者是较高层次的认知能力[2]。主要是由问题解决、决策、批判性思维、创造性思维这些能力构成。高阶思维在教学目标分类中表现为较高水平认知水平层次的能力,如分析、综合、评价和转化。它在学习活动中体现为联系和转化的能力,即根据实际问题,挖掘已有经验,广泛建立联系,迅速选择合适的方法或对已有经验进行改造,解决新问题。一题多解是数学教学中培养高阶思维的有效途径之一,运用发散思维、综合分析事物各方面属性和内在规律,从不同角度、不同路径、不同方式分析和思考问题,反省判断,打破思维定式,创造性地解决问题,实现一题多解,从而发展学生高阶思维能力,提升学生数学学科核心素养。

2. 试题呈现

$$\sin^2 10^\circ + \cos^2 40^\circ + \sin 10^\circ \cos 40^\circ$$

3. 一题多解

解法一: 从和差积互化角度求解

根据 $\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A+B) + \sin(A-B)]$, $\sin^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{2}$, $\cos^2 B = \frac{1 + \cos 2B}{2}$ 。

$$\begin{aligned}
& \sin^2 10^\circ + \cos^2 40^\circ + \sin 10^\circ \cos 40^\circ \\
&= \frac{1 - \cos 20^\circ}{2} + \frac{1 + \cos 80^\circ}{2} + \frac{1}{2} [\sin(10^\circ + 40^\circ) + \sin(10^\circ - 40^\circ)] \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 20^\circ + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 80^\circ + \frac{1}{2} [\sin(10^\circ + 40^\circ) + \sin(40^\circ - 10^\circ)] \\
&= 1 + \frac{1}{2} [\cos 80^\circ - \cos 20^\circ] + \frac{1}{2} [\sin(10^\circ + 40^\circ) + \sin(40^\circ - 10^\circ)] \\
&= 1 + \frac{1}{2} \left[-2 \sin \frac{80^\circ + 20^\circ}{2} \sin \frac{80^\circ - 20^\circ}{2} + \frac{1}{2} [\sin(10^\circ + 40^\circ) + \sin(40^\circ - 10^\circ)] \right] \\
&= 1 + \frac{1}{2} [-2 \sin 50^\circ \sin 30^\circ] + \frac{1}{2} [\sin 50^\circ + \sin(-30^\circ)] \\
&= 1 - \frac{1}{2} \sin 50^\circ + \frac{1}{2} \sin 50^\circ - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

此方法需要基础知识来作为依托,但步步紧扣三角恒等变化的核心工具(和差化积、同角关系),展现了强大的逻辑推理能力。从降幂“将维”简化,到和差化积“变形”转化,每一步都引导学生主动调用公式,且后一步依赖前一步的结果,形成“递推式”思维链条。每一步都需要精准识别模式、选择公式并严谨推导式逻辑链条严密性的绝佳训练。该解法体现了逻辑推理的严密性和数学运算的精确性,是训练学生演绎推理能力的典型范例。

解法二:对偶式解题

当看到 $\sin^2 a$ 和 $\cos^2 a$ 就会自然而然的想起 $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ 。

$$\sin^2 10^\circ + \cos^2 40^\circ + \sin 10^\circ \cos 40^\circ$$

$$\text{令 } X = \sin^2 10^\circ + \cos^2 40^\circ + \sin 10^\circ \cos 40^\circ$$

$$\text{令 } Y = \cos^2 10^\circ + \sin^2 40^\circ + \cos 10^\circ \sin 40^\circ$$

$$\begin{aligned}
X + Y &= \sin^2 10^\circ + \cos^2 40^\circ + \sin 10^\circ \cos 40^\circ + \cos^2 10^\circ + \sin^2 40^\circ + \cos 10^\circ \sin 40^\circ \\
&= (\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ) + (\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ) + (\sin 10^\circ \cos 40^\circ + \cos 10^\circ \sin 40^\circ) \\
&= 1 + 1 + \sin(10^\circ + 40^\circ) \\
&= 2 + \sin 50^\circ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X - Y &= \sin^2 10^\circ + \cos^2 40^\circ + \sin 10^\circ \cos 40^\circ - \cos^2 10^\circ + \sin^2 40^\circ + \cos 10^\circ \sin 40^\circ \\
&= (\sin^2 10^\circ - \cos^2 10^\circ) + (\sin^2 40^\circ - \cos^2 40^\circ) + (\sin 10^\circ \cos 40^\circ - \cos 10^\circ \sin 40^\circ) \\
&= \left(\frac{1 - \cos 20^\circ}{2} - \frac{1 + \cos 20^\circ}{2} \right) + \left(\frac{1 - \cos 80^\circ}{2} - \frac{1 + \cos 80^\circ}{2} \right) + (\sin 10^\circ \cos 40^\circ - \cos 10^\circ \sin 40^\circ) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 20^\circ - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 20^\circ + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 80^\circ - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 80^\circ + \sin(-30^\circ) \\
&= -\cos 20^\circ + \cos 80^\circ + \sin(-30^\circ) \\
&= \cos 80^\circ - \cos 20^\circ - \frac{1}{2} \\
&= -2[\sin 50^\circ + \sin 30^\circ] - \frac{1}{2} \\
&= -\sin 50^\circ - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

可得 $(X+Y)+(X-Y)=2+\sin 50^{\circ}-\sin 50^{\circ}-\frac{1}{2}$ 。

计算可得 $X=\frac{3}{4}$ 。

原式 $=\frac{3}{4}$ 。

此对偶式解题方法直接化繁为简，突破了直接计算的困境和公式的记忆。对偶式的核心是利用式子结构的对称性(正弦与余弦、角度的互补与互余关系)通过“和”与“差”的组合，将分散的项整合，使公式($\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ 、两角和差公式)得以直接应用。这种对称结构体现了数学中“正难则反”“整体处理”的数学思想。学生在学习过程中，能够体会到数学结构的美感与对称性，培养从整体把握问题的能力。

解法三：借助几何图形

原式变为 $\sin^2 10^{\circ} + \sin^2 50^{\circ} - 2\sin 10^{\circ} \sin 50^{\circ}$ ，它的结构与形状和三角形中的余弦定理相似，故可作 $\triangle ABC$ 如图 1 所示。

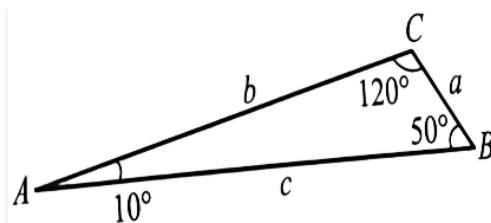


Figure 1. Schematic diagram of triangle construction (Solution 3)

图 1. 三角形构造示意图(解法三)

由余弦定理和正弦定理可得 $\sin^2 C = \sin^2 A + \sin^2 B - 2\sin A \sin B \cos C$ 。

故可得 $\sin^2 10^{\circ} + \sin^2 50^{\circ} - 2\sin 10^{\circ} \sin 50^{\circ} = \sin^2 120^{\circ}$ 。

即原式 $=\frac{3}{4}$ 。

原式是复杂的三角函数表达式，直接用代数公式化简难度大和其运算能力也提出更高的要求。而通过观察式子结构($\sin^2 A + \sin^2 B + 2\sin A \sin B \cos C$)与余弦定理($c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$)的高度相似性，将代数形式转化为几何模型 - 构造以 10° 、 50° 、 120° 为内角的三角形，借助三角形的边与角的关系，将三角函数转化为几何量的推导。这种解法完全避免了和差化积，积化和差等知识，同时也避免计算上的繁琐，仅仅使用熟知的正弦定理和余弦定理。体现了数形结合的思想，是培养学生直观想象与建模能力的好素材。

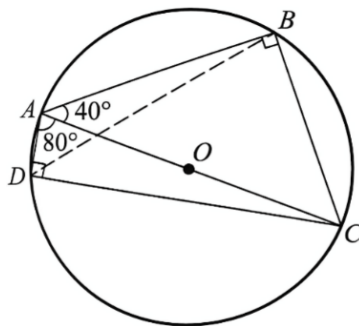


Figure 2. Schematic diagram of unit circle and right angled triangle construction (Solution 4)

图 2. 单位圆与直角三角形构造示意图(解法四)

解法四：构造圆利用性质和正弦定理

构造了单位圆，在 $Rt\triangle ABC$ 中，因为直径所对的圆周角是直角， $\angle BAC = 40^\circ$ 根据三角函数的定义，在直角三角形中，一个锐角的余弦等于它与邻边的比值，这里的斜边 $AC = 1$ ，所以 $AB = \cos 40^\circ$ 。同理在 $Rt\triangle ADC$ 中 $\angle DAC = 80^\circ$ ，斜边 $AC = 1$ ，则 $AD = \cos 80^\circ$ ，接下来就是利用正弦定理求 DB 的长度。

$$\sin^2 10^\circ + \cos^2 40^\circ + \sin 10^\circ \cos 40^\circ$$

如图 2 所示，构造直径为 1 的 $\odot O$ ，因为 AC 为直径，根据直径所对的圆周角是直角，所以 $\angle BAC = \angle ADC = 90^\circ$ 。已知 $\angle BAC = 40^\circ$ ， $\angle DAC = 80^\circ$ 。在 $Rt\triangle ABC$ 中，根据余弦的定义可得 $AB = AC \times \cos 40^\circ$ 又因为 $AC = 1$ （直径为 1），所以 $AB = \cos 40^\circ$ 同理可得，在 $Rt\triangle ADC$ 中， $AD = AC \times \cos 80^\circ = \cos 80^\circ$ 。

在 $\triangle ABD$ 中， $\angle BAD = \angle BAC + \angle DAC = 40^\circ + 80^\circ = 120^\circ$ 。

根据正弦定理(其中 a 、 b 、 c 为三角形的三边， A 、 B 、 C 为三角形的三个内角)，在 $\triangle ABD$ 中， $\frac{DB}{\sin \angle BAD} = 2R$ (R 为 $\triangle ABD$ 外接圆半径)，因为 $\odot O$ 的直径为 1，所以 $\triangle ABD$ 的外接圆半径 $R = \frac{1}{2}$ ，则

$$DB = 2R \sin \angle BAD = 2 \times \frac{1}{2} \times \sin 120^\circ = \sin 120^\circ。$$

根据余弦定理 $DB^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \angle BAD$ ，将 $AB = \cos 40^\circ$ 、 $AD = \cos 80^\circ$ 、 $\angle BAD = 120^\circ$ 、 $DB = \sin 120^\circ$ 代入可得

$$\sin^2 120^\circ = \cos^2 80^\circ + \cos^2 40^\circ - 2 \cos 80^\circ \cos 40^\circ \cos 120^\circ = \frac{3}{4}$$

$$\text{即原式} = \frac{3}{4}。$$

原式是抽象的三角代数的表达式，解法通过观察式子结构(与余弦定理高度契合)创造性地构造圆和直角三角形，把 $\cos 80^\circ$ 、 $\cos 40^\circ$ 等三角函数值对应为圆中直角三角形的边长(如 $AB = \cos 40^\circ$ 、 $AD = \cos 80^\circ$)将“数的运算”转化为“形的度量”，让抽象的三角问题变得直观可感。串联了三角函数定义(直角三角形中余弦的几何意义)、圆的性质(直径所对圆周角为直角)、正弦定理(三角形边角关系)、余弦定理(三角形边的平方关系)，打破了三角、几何知识的界限，展示了数学间的内在关联、引导学生建立知识网络，更是从不同视角重构问题的“思维习惯”，体现数学解题的灵活性和创造性。引导学生从不同视角重构问题，培养综合运用知识的能力。

解法五：变量代换法

$$\text{令 } \sin 10^\circ = \alpha + \beta, \cos 40^\circ = \alpha - \beta$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(\sin 10^\circ + \cos 40^\circ) = \sin 30^\circ \cos 20^\circ = \frac{1}{2} \cos 20^\circ$$

$$\beta = \frac{1}{2} \sin 10^\circ - \cos 40^\circ = -\cos 30^\circ \sin 20^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 20^\circ$$

$$\text{故原式} = (\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2 + (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = 3\alpha^2 + \beta^2 = \frac{3}{4}(\sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ) = \frac{3}{4}。$$

$$\text{即原式} = \frac{3}{4}。$$

变量代换是一种重要的数学思想和方法，这里的和差代换法源于恒等式

$$x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \quad y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} \quad \text{此方法化繁为简，转化视角。串联起三角函数和差化积(求 } \alpha、\beta \text{ 时稳定)}$$

性用到)与代数运算(完全平方、平方差展开化简)知识。学生运用时,能主动调动多知识板块,像搭积木一样,把零散知识“拼”成解题体系,强化知识间联系,让知识网更加紧密。

4. 五种解法所体现的核心素养分析

以上的五种解题方法分别从不同角度切入同一问题,集中体现了数学核心素养的多个维度。

(1) 数学抽象:体现在对三角函数关系的符号化与本质提炼,无论是通过和差代换将 $\sin 10^\circ$ 、 $\cos 40^\circ$ 抽象为 α 、 β 的代数关系,还是用降幂公式将高次三角式转化为低次余弦式,或是将三角运算抽象为几何图形中的边长关系,均舍去了角度、具体形式等非本质特征,抓住“数量关系”“结构本质”,实现从具体到抽象的转化,培养用符号语言表达数学关系的能力。

(2) 逻辑推理:贯穿于解题的全流程,从公式选择到步骤推导,从构造模型到方程联立,形成环环相扣的推理链,每一步均属于数学定理或者性质,体现演绎推理的严谨性与连贯性,培养按逻辑规则解决的习惯。

(3) 直观想象:表现为“以形助数”的转化能力,从三角式结构与联想到三角形、圆等几何模型,将 $\cos \theta$ 的代数意义转化为直角三角形中邻边与斜边的比,通过图形直观理解抽象符号的本质,实现从符号抽象到具体图形的对应,借助几何直观简化对三角形关系的理解,体现了数与形的结合。

(4) 数学运算:涵盖多样运算技能与策略,包括将幂运算、和差化积运算、代数公式展开、方程求解、几何定理的数值转化等。既要求公式运用的准确性也强调运算顺序与策略的合理性,锻炼精准,高效的运算能力。

(5) 数学建模:体现为问题的模型化转化,无论是通过设定 α 、 β 建立三角函数代数模型,均是从具体问题提炼共性结构,构建数学模型以简化求解过程,培养用模型思想解决问题的意识。

(6) 数据分析:在三角运算中隐含对数据关联的挖掘,通过观察角度特征(如 $10^\circ + 40^\circ = 50^\circ$ 、 $80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$ 等特殊角关系)、式子结构对称性,分析数据间的内在联系,为公式选择、模型构建提供依据,体现对数据特征的敏感与分析能力。

克莱因说过“数学是一种理性的精神,使人类的思维得以运用到最完善的程度”[3]。数学的魅力在于他的多样性。一题多解并不是教师的炫技,而是首先要求教师要对知识有全面细致的理解和考题有足够的储备,对于题型要有非常高的敏感度,同时也要求教师有较高的创新能力和创新意识。本文通过一道三角函数求值问题,展示了五种不同的解题路径(和差化积、对偶式、几何构造、单位圆与正弦定理、变量代换),系统阐述了一题多解教学在培养学生高阶思维(分析、综合、评价、创造)中的具体作用。五种解法各具特色,分别侧重逻辑推理的严密性、整体代换的对称性、数形结合的直观性、跨领域知识的整合性以及代数变通的灵活性,覆盖了数学抽象、逻辑推理、直观想象、数学运算、数学建模和数据分析六大核心素养,有效验证了一题多解作为发展高阶思维的教学载体价值。然而,任何教学模式均有其适用边界与潜在局限,一题多解亦非“万能钥匙”。其有效实施需满足以下前提条件:(1) 学生已具备扎实的“四基”(基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验),否则多解展示易沦为教师“独角戏”,学生难以真正参与思维比较;(2) 所选问题本身应具有足够的思维深度与结构开放性,若问题过于简单或解法单一,则无法激发多角度探究;(3) 课堂时间与教学进度需统筹兼顾,不宜为“多解”而刻意堆砌解法,否则可能挤占学生对主干知识的深度学习时间。此外,教学中还应警惕“解法罗列”陷阱——若仅展示不同解法而不引导学生进行横向对比、优劣评析、适用场景总结,则高阶思维中的“评价”与“创造”层次难以达成,反而可能加重学生记忆负担。从理论层面看,一题多解的教学设计与波利亚(Polya)的问题解决四阶段理论(理解题意、拟定计划、执行计划、回顾反思)高度契合:不同解法正是“拟定计划”阶段发散思维的产物,而“回顾反思”环节则是对各解法的比较与优化,这正是元认知能力的重要体现

[4]。同时,参照布鲁姆教育目标分类学(修订版),不同解法对应的认知层次各有侧重:直接套用公式为“记忆”与“理解”,构造几何模型为“应用”与“分析”,而变量代换与对偶式设计则需“评价”与“创造”[5]。教师若能依据学情,有选择地呈现解法并引导学生自我定位认知层次,则可使一题多解真正服务于差异化教学[6]。综上,一题多解不应被视为教师的“炫技”或应试训练的花哨手段,而应作为启迪思维、构建知识网络、培养批判与创新能力的常态化教学策略。一线教师在使用时,需秉持“精选问题、适度开放、重在比较、贵在反思”的原则,关注学生思维的真实发生,方能使这一传统教学手段在核心素养导向的课堂中焕发新的生命力。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版 2020年修订) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [2] 钟志贤. 教学设计的宗旨: 促进学习者高阶能力发展[J]. 电化教育研究, 2004, 25(11): 13-19.
- [3] 张奠宙, 宋乃庆. 数学教育概论[M]. 第3版. 北京: 高等教育出版社, 2016.
- [4] 波利亚. 怎样解题: 数学思维的新方法[M]. 涂泓, 冯承天, 译. 上海: 上海科技教育出版社, 2007.
- [5] Anderson, L.W. and Krathwohl, D.R. (2001) A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assessing: A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives. Longman.
- [6] 郑毓信, 肖柏荣, 熊萍. 数学思维与数学方法论[M]. 成都: 四川教育出版社, 2001.