College and Job 职业教育发展, 2026, 15(11), 158-164
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ve
https://doi.org/10.12677/ve.2026.1511474

Hans汉斯

基于问题驱动的高等数学概念教学研究

——以“极限”与“导数”为例

祝佳玲

乐山师范学院数学与统计学院，四川 乐山

收稿日期：2026年10月9日；录用日期：2026年11月3日；发布日期：2026年11月12日

摘　要

极限与导数是高等数学中最基础也最抽象的核心概念，“定义－性质－举例”的传统三阶段讲授模式难以帮助学生理解概念本质。本文以问题驱动教学理论为基础，针对极限与导数概念教学中“抽象性高”与“学生认知薄弱”之间的核心矛盾，设计了一条如何“从直观感知到形式定义”递进的教学路径。通过对比问题驱动模式与常规讲授模式在概念理解深度上的差异，分析并提出高等数学概念教学应遵循以本质性问题引领、以阶梯性问题递进、以反思性问题总结的设计原则。研究认为，问题驱动教学能够有效化解学生的认知冲突，推动灌输式的教学向充满活力的课堂思考转变，进而为高等数学抽象概念教学提供操作性较强的实践参考。

关键词

问题驱动教学，高等数学，极限概念，导数概念，概念教学

Research on Problem-Driven Teaching of Advanced Mathematics Concepts

—Taking “Limit” and “Derivative” as Examples

Jialing Zhu

School of Mathematics and Statistics, Leshan Normal University, Leshan Sichuan

Received: October 9, 2026; accepted: November 3, 2026; published: November 12, 2026

Abstract

Limits and derivatives are the most fundamental and abstract core concepts in advanced mathematics. The traditional three-stage teaching model of “definition-properties-examples” is unable to

文章引用: 祝佳玲. 基于问题驱动的高等数学概念教学研究[J]. 职业教育发展, 2026, 15(11): 158-164.
DOI: 10.12677/ve.2026.1511474

help students understand the essence of these concepts. Based on the problem-driven teaching theory, this paper addresses the core contradiction between "high abstraction" and "weak students' cognition" in the teaching of limits and derivatives concepts, and designs a progressive teaching path of "from intuitive perception to formal definition". By comparing the differences in the depth of concept understanding between the problem-driven mode and the conventional teaching mode, this paper analyzes and proposes the design principles for advanced mathematics concept teaching, which should be led by essential questions, proceed in a step-by-step manner, and summarize through reflective questions. The study suggests that problem-driven teaching can effectively resolve students' cognitive conflicts, promote the transformation of rote teaching to a dynamic classroom thinking, and thereby provide more practical reference for the teaching of abstract concepts in advanced mathematics.

Keywords

Problem-Driven Teaching, Advanced Mathematics, Limit Concept, Derivative Concept, Concept Teaching

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 问题的提出

高等数学是以微积分为主体，其概念体系具有高度的抽象性和形式化的一门大学理工科基础课程。极限是微积分理论的基石，导数则是微积分中第一个真正意义上的变化率概念，两者实现了从常量数学向变量数学的跨越。然而，对大一新生而言，要实现这一跨越极为困难。一项以南非工科一年级学生为对象的研究，使用按 APOS 四阶段设计的评估工具，发现学生的表现呈显著的不均衡分布：Action 阶段得分率最高(61.78%)，Object 阶段次之(48.35%)，Schema 阶段为 29.62%，而 Process 阶段最低，仅为 14.66%。这一模式让我们意识到学生能够执行求导的操作，甚至能在一定程度上将导数作为对象来操作，但恰恰在将极限过程内化为可反思的心理过程这一关键环节上较薄弱。另一项针对莱索托数学荣誉学生的研究同样发现，学生在代数表征中能展现出导数作为极限的过程概念，但无法在图形表征中实现；部分学生将趋向误认为落在某点上，而非在邻域内。这表明，过程性理解不仅难以建立，而且具有表征依赖性，在一种表征中建立的过程理解，未必能迁移到另一种表征。

从具体教学实践来看，极限概念的教学长期面临着一个矛盾：数学的严谨性要求教师向学生呈现出 $\varepsilon-\delta$ 语言下的形式化定义，但学生的认知基础还停留在高中阶段的直观描述。这种矛盾导致大量学生记住了定义却不懂其含义，会算极限却不理解极限的内涵。有研究指出，极限概念的抽象性是高等数学教学中的一大难点，如何帮助学生从直观感知向形式理解过渡，是概念教学需关注的核心问题[1]-[3]。导数概念的教学同样面临类似矛盾：高中阶段学生接触的是瞬时变化率的直观解释，大学阶段则要求学生理解差商极限的严格定义，两种导数概念教学方式对学生认知的要求差异较大。

问题驱动教学为解决这一矛盾提供了具体思路。问题驱动教学以问题为中心，学生带着问题进行探究并尝试提炼出概念或定理。这一模式的核心在于，让学生在数学知识中积极且活跃地思考，而非直接灌输知识。本文以极限与导数概念教学为例，探讨问题驱动模式在高等数学抽象概念教学中的设计思路与实现路径。

2. 问题驱动教学的理论基础

问题驱动教学来源于建构主义学习理论。建构主义认为，知识不是被动接收的现成品，而是学习者基于已有经验主动建构的产物[4] [5]。在高等数学概念教学中，教师需从学生已有的认知结构出发，创设能引发学生认知冲突的问题情境，进而使学生在同化与顺应的交互过程中完成概念的建构。

从高等数学教学的视角来看，问题驱动教学的本质在于围绕讲授高等数学概念、定理过程中产生的关键性问题展开教学，把教学过程当做一段探索和研究的过程。这一理念要求教师具备一种逆向思维的能力：将形式化的数学结论还原为它出现时的最原始问题，再以问题链条的形式，环环相扣地引导学生从发现问题到得出结论。

在高等数学问题的语言描述中，问题驱动的价值尤为突出。高等数学的高度抽象性极易使学生的学习过程成为符号操作训练的过程，学生往往在大量计算中迷失了对概念本质的理解和把握。问题驱动模式通过设置“为什么有这个定义”“这个定义的目的是什么”“如果没有这个定义会如何”等本质性问题，将抽象符号瞄准在它们所呼应的问题上，进而实现高等数学概念的可理解性。

3. 极限概念的问题驱动教学设计

3.1. 教学起点与核心问题

极限概念的认知起点不是$\varepsilon - N$定义，而是学生头脑中关于“无限接近”这个词语的直觉。高中生已经接触过数列极限的直观描述(例如“数理的通项无限趋近于某个常数”)，但这种直觉是模糊的、未经验证的。问题驱动的第一步，不是否定这种直觉，而是将其问题化。因此核心问题可设计为：“无限接近”是什么意思？这个问题看似简单，实则是极限概念的核心困难所在。教师可以引导学生用具体例子检验这一说法的精确性。例如，数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$是否“无限接近”于0？学生凭直觉会回答“是”。追问：它是否也“无限接近”于0.001？学生在分析过程中会逐渐意识到，“无限接近”一词在日常语言中是模糊的，需要一种精确的语言来判定“接近到什么程度”以及“从何时开始”。

3.2. 问题链的设计

极限的概念从“无限接近”到$\varepsilon - N$定义，需要一条逐步逼近形式化的阶梯。以下问题链的设计遵循“从描述到定量、从静态到动态、从正面到反面”的递进逻辑顺序：

第一层：描述性问题。“对于数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$，你能找到从某项开始，使得此项之后所有的项与0的差距都小于0.1吗？小于0.01呢？小于0.001呢？”学生在回答中反复验证，逐渐意识到一个规律：无论给定多小的差距标准，总能找到一个项保证此后所有项都满足。

第二层：定量化问题。“如果把‘差距标准’记为ε，把‘某项’记作N，你能用数学语言重新表述上面的结论吗？”这一步引导学生尝试写出$\varepsilon - N$定义，即“对任意$\varepsilon > 0$，存在N，当$n > N$时，$|x_n - a| < \varepsilon$”。

第三层：辨析性问题。“这个表述中，ε和N是什么关系？N是否唯一？如果我把ε换成2ε，N需要改变吗？”这些问题可以帮助学生理解定义中的逻辑依赖关系：N依赖于ε，ε不同，N会发生变化，但要求ε“任意小”是核心。

第四层：反思性问题。“为什么不能用‘无限接近’作为极限的定义？$\varepsilon - N$定义到底‘精确’在哪里？”通过反思，学生体会到形式化定义的作用：它把“无限”这个过程化的语词，转化为可操作的、消除歧义的精确性条件。

3.3. 从数列极限概念到函数极限概念的迁移

数列极限的概念建立之后，函数极限概念的教学可以设计为类比－推广的问题情境。核心问题是：数列是离散地趋近，函数则是连续地趋近，那么函数极限的定义需要怎么改写？学生通过类比“$n\to\infty$”与“$x\to\infty$”或“$x\to x_0$”，尝试将“存在N，当$n>N$时”替换为“存在X，当$x>|X|$时”，或“存在δ，当$0<|x-x_0|<\delta$时”，教师只在关键处(例如，当自变量趋于有限值时，条件“去心邻域”的必要性)给予点拨。这一过程本身就是对“$\varepsilon-X$语言”和“$\varepsilon-\delta$语言”的主动建构，而非只是被动接受。

4. 导数概念的问题驱动教学设计

4.1. 教学起点与核心问题

导数的教学通常从“瞬时速度”作为概念的引入，但问题在于，学生往往把导数理解为“求导公式”的推导，而非“变化率”的精确表达。问题驱动的核心问题应指向概念本身：“瞬时速度是一个瞬时量，而速度需要位移和时间，当时间间隔为 0 时速度无意义。那么‘瞬时速度’是什么意思？”设置这一问题的目的是其它揭示了导数概念产生的真正困难：它要处理的是一个“$\frac{0}{0}$”的极限形式。如果学生未意识到这个困难，他们对导数的理解就始终停留在运用公式求导数的层面。

4.2. 问题链的设计

从平均速度到瞬时速度，问题链的设计围绕“逼近”与“极限”展开：

第一层：情境性问题。“自由落体运动中，物体在$t=2s$秒时的速度是多少？”学生首先计算平均速度$\frac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}$，如果取不同的时间间隔$\Delta t$将得到不同的平均速度值。

第二层：模式发现。“当Δt越来越小时，平均速度的变化趋势是什么？”学生通过直接计算或几何图形观察发现，Δt趋近于 0 时，平均速度将趋近于一个确定的常数。此时教师引入关键追问：“这个‘趋近’和之前学过的数列的极限或函数的极限有什么关系？”

第三层：定义建构。“如果要用极限的数学语言来定义瞬时速度，应该怎么写？”学生尝试写出：$v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}$。教师引导学生确认这一表述的合理性，并推广到一般函数：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，此极限形式即为函数$f(x)$在$x_0$处的导数，记为$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$。

第四层：意义追问。“这个定义中，‘极限存在’意味着什么？如果极限不存在，导数的几何意义是什么？”通过讨论尖点(如$f(x)=|x|$在$x=0$处)，进一步让学生理解导数存在性的几何含义，避免将“可导”视为理所当然。

4.3. 避免“定义－公式－计算”的异化

问题驱动教学在导数概念中最容易被异化的环节，是“用定义求导”被简化为利用求导公式直接给出函数的导数。常见做法是给出定义后立即进入求导法则的教学，学生记住了$(x^n)'=nx^{n-1}$，却未体验过用极限定义推导这一公式的过程。问题驱动设计应至少安排一个完整的“从定义推导公式”的探究环节，例如以简单函数$f(x)=x^2$为例，让学生感受：展开差商→化简→取极限→得到结论的全过程。这一过程的认知价值不在于结果，而在于让学生亲身体验导数定义的实现过程。

5. 教学实施的关键要点

问题驱动概念教学的实施效果如何，取决于以下三个关键条件：第一，问题必须是“本质性”的，而非“技巧性”的。区分标准是：这个问题是否触及概念产生的根本困难？“无限接近是什么意思”是本质性问题，“如何用 $\varepsilon-N$ 或 $\varepsilon-X$ 或 $\varepsilon-\delta$ 证明这个极限”是技巧性问题。问题驱动不排斥技巧方面训练，但技巧训练应建立在理解并掌握概念的基础之上。第二，课堂需要节奏快慢得当，给学生思考的时间。问题驱动教学的挑战是教师会忍不住直接给出问题的答案。学生面对一个本质性问题时，需要经历困惑、分析、尝试、挑战的完整认知过程。有研究指出，在概念教学中给学生留足思考时间与空白是促进抽象素养养成和提升的关键方法[6] [7]。教师需要避免效率焦虑，允许课堂在短时间内缓慢进行。第三，教师需要具备较强的问题设计的专业能力。问题驱动并非简单地在讲授数学概念过程中插入几个提问，而是要求教师对概念的知识形成过程有深层次理解，才能设计出真正对学生有驱动力的本质性问题。这要求教师有较强的专业学科素养和教学设计能力，也是问题驱动模式在实践中推广的主要困难和挑战。

6. 问题模式在大班教学环境中的应用策略

大班教学常避免探究性提问，这是因为学生人数多、个体差异大、教学进度压力重，教师难以同时实现互动深度与覆盖广度。然而，这一判断实际上忽视了一个关键事实：大班之所以难，不在于人数本身，而在于缺乏将面向全体转化为可操作的机制。问题模式的核心并非每问必答、每答必深，而是通过技术工具与活动设计的配合，在有限时间内制造尽可能多的思考空间。接下来从即时反馈、参与结构、进度平衡三个维度，讨论问题模式在大班环境中实施的可行策略。

首先，利用智慧教学工具实现即时提问与反馈。大班提问的首要困难是反馈延迟：教师抛出一个问题，只有少数学生会举手，多数人处于事不关己的状态。智慧教学工具的介入解决的是可见性问题。以“学习通”为代表的课堂互动系统，其核心功能不在于技术本身，而在于将提问从“点对点”变为“点对面”的信息采集。教师可在讲授关键节点时插入一道易操作的选择题或简答题，限时 1~2 分钟，要求全体学生通过手机端提交。系统将即时生成答案分布情况，教师根据分析数据判断：如果正确率低于预期，那么暂停进一步讲解知识点，组织大家讨论后再次作答；如果正确率较高，那么可快速确认并进入下一环节。即时反馈工具降低了公开发言的门槛，学生在匿名或半匿名状态下提交答案，实际上是在为后续的口头讨论作铺垫。

其次，设计“结对讨论”与“小组任务”保障参与度。结对讨论之所以在大班中适用，是因为它有三个递进环节：个体思考(迫使每个人产生初始判断)、两两交流(在交流中检验和修正想法)、全班分享(选取若干对向全班汇报)。其关键不在讨论，而在第一步的思考不可省略。大班学生容易跳过独立思考的过程直接进入讨论，结果是一方盲从另一方，讨论沦为单向告诉。教师需要明确要求：先各自在纸上写下自己的思考过程，再转头交流。这个要求是保证后续对话质量的前提。小组任务需面对大班特有的管理难题：组数多、教师无法逐一介入。有效的做法如：以四人为一组，设定记录员、发言人、质疑者、计时员四个角色，每项任务要求小组提交一个可见的成果，比如一张海报、一段文字、一道题的解答过程等。教师不必关注每一组，而是随机抽取 2 或 3 组进行展示，并让其他组进行补充或质疑。这种抽样展示结合全班校验的方式，使每组都处于可能被抽到的状态，参与度更高。此外，固定学习小组比每次临时分组更有效，因为学生之间建立熟悉度后，讨论的速度会明显加快，教师也无需反复花费课堂时间组织分组。

最后，平衡探究性学习与教学进度的策略。大班教师最焦虑的是探究需要时间，进度不等人。二者并非不可调和，但需要重新理解探究在大班中的形态。第一，将探究切片化：一节课不追求完成一个完

整的探究循环，而是聚焦于一个环节。例如，不要求学生从提出问题到得出结论全部自主完成，而是教师提出一个数据或现象，让学生用 5 分钟提出假设，再用 5 分钟用已有知识进行初步检验。这样的微型探究虽然不完整，但保留了探究的核心认知动作，即假设与验证。第二，用课外时间增加课内深度：将资料搜集、数据整理等耗时环节放在课前或课后，而课堂时间集中讨论、质疑与修正。学习通等平台的任务发布功能可以支撑这一设计：课前推送预习材料与引导问题，课堂直接进入基于课前准备的深度探究。第三，教师需要明确每节课必须覆盖的核心知识点，通常为 2 或 3 个，其余内容可根据探究展开的实际情况灵活调整。当探究讨论触及核心知识点的理解时，允许多花一点时间；当讨论偏离核心时，果断结束。这种灵活处理的方法比完成教案的刚性执行更符合大班教学的实际。

7. 结语

将本文的教学设计与 APOS 阶段进行对照，可以发现二者之间存在并非刻意但相当系统的对应关系。第一，即时提问与反馈工具对应的是 Action 阶段向 Process 阶段的过渡条件。第二，结对讨论与小组任务对应的是 Process 阶段的社会性支撑。第三，微探究策略对应的是 Schema 阶段的建构条件。

极限与导数的概念教学，本质上是引导学生完成从直观感受到形式理解的认知跨越。问题驱动模式的价值，不是提供一套一层不变标准化的教学流程，而在于唤起数学概念教学应有的问题意识，每个数学定义或概念都是为了解决某个问题而被创造出来的，每个数学符号背后都经历了数学家们热烈的思考。如果教师能够将概念背后最原始问题重新呈现给学生，抽象就不再是学生理解的困难之处了，而成为思维提升的桥梁。

问题驱动模式在高等数学教学中具有普遍性，例如在面对微分方程问题时以问题驱动支撑建构方程而非仅求解方程。传统微分方程教学的重心落在求解技巧上，学生习惯于模仿例题、执行计算过程，而对“方程从何而来”“解的行为意味着什么”缺乏深刻反思。一项在美国中大型公立大学工程数学课程中实施的探究导向微分方程教学改革，将课程目标明确转向：用真实问题激发数学内容、让学生学会建构而不仅是求解方程、连接符号或图形或数值三种表征、通过讨论与论证发现传统上由教师直接展现的内容。这一改革模式与问题驱动模式的设计逻辑类似。在大班环境中，问题驱动可以注意两个关键节点：其一，方程建构环节，给出一个物理或生物情境，要求学生以小组为单位写出描述变化率的方程，并解释方程中每一项的物理含义，这对应的是从“情境理解”到“符号表达”的转换过程；其二，解的定性解释环节，在求出解之后，追问“当参数取极值时，解会如何变化”，使学生将符号结果与图形或数值表征进行协调。问题驱动在微分方程中的可行路径：不削减求解训练，而是在求解前后嵌入解释性提问与讨论。

另外，问题驱动模式在高等数学教学中的实践仍面临课时少的压力、学生认知层次的差异、教师能力不同等多重因素的影响。如何在有限的课时内实现有效的问题驱动，如何针对具有不同基础的学生调整问题设置的梯度，仍有待进一步实践和探究。

基金项目

本成果由“乐山师范学院高层次人才引进科研启动项目”资助，项目课题名称为：耗散效应的耦合对可压缩 Navier-Stokes 方程组光滑解的整体正则性的影响。项目编号为：205260016/801。

参考文献

[1] 张鑫. 问题驱动模式下的初中数学概念构建研究——以“一次函数”教学为例[J]. 数理化解题研究, 2026(10): 63-65.

[2] 翁浩彬. 问题链驱动下的高中数学概念深度教学策略研究——以“等差数列”为例[J]. 数理化解题研究, 2026(13): 44-46.

[3] 杨琴乐, 白雪婷. 基于“问题驱动”的高等数学教学案例的设计与实践[J]. 大学数学, 2026, 42(4): 113-120.

[4] 魏东升. 问题链驱动下数学概念教学中核心素养培养策略研究——以“分段函数”为例[J]. 中学教研(数学版), 2026(5): 11-16.

[5] 寇冰煜, 毛自森, 黄丽芹. 大概念视域下 5E 和 BOPPPS 融合式教学实践研究——以高等数学课程为例[J]. 湖北师范大学学报(自然科学版), 2026, 46(1): 81-87.

[6] 朱甫现. 问题驱动教学提升学生数学逻辑思维的实践研究[J]. 名师在线(中英文), 2026, 12(24): 76-77.

[7] 周荧. 学情分析驱动的高等数学教学设计优化——以定积分概念为例[J]. 教育进展, 2026, 16(4): 252-259.