World Economic Research 世界经济探索, 2017, 6(3), 59-63
Published Online September 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/wer
https://doi.org/10.12677/wer.2017.63006

Hans汉斯

Qualitative Analysis of a Three-Dimensional Autonomous Differential Economic Model

Yuetian Gao[1], Aiying Han[2]

[1]Yunnan Minzu University, Kunming Yunnan
[2]Yuxi Agricultural Vocational-Technical College, Yuxi Yunnan
Email: sweetfangyu@163.com

Received: Aug. 11th, 2017; accepted: Aug. 28th, 2017; published: Sep. 4th, 2017

Abstract

This paper focuses on a class of important models in macroeconomics, which is a three-dimensional autonomous differential system essentially. It reveals some laws in economics by qualitative analysis of its equilibrium stability and Hopf bifurcation.

Keywords

Macroeconomic Model, Autonomous Differential System, Stability, Hopf Bifurcation

一个三维自治微分经济模型的定性分析

高玥恬[1]，韩爱英[2]

[1]云南民族大学，云南 昆明
[2]玉溪农业职业技术学院，云南 玉溪
Email: sweetfangyu@163.com

收稿日期：2017年8月11日；录用日期：2017年8月28日；发布日期：2017年9月4日

摘　要

本文主要研究宏观经济学中一类重要的模型，其本质为三维的自治微分系统。通过对它的平衡点稳定性以及产生的Hopf分支进行定性分析，揭示了经济学中的一些规律。

关键词

宏观经济模型，自治微分系统，稳定性，Hopf分支

文章引用: 高玥恬, 韩爱英. 一个三维自治微分经济模型的定性分析[J]. 世界经济探索, 2017, 6(3): 59-63.
DOI: 10.12677/wer.2017.63006

1. 引言

Vŏsvrda [1]提出一个关于外资投资的宏观经济学模型：

$$\begin{cases}\dot{S}=aY+pS\left(k-Y^2\right)\\ \dot{Y}=v\left(S+F\right)\\ \dot{F}=mS-rY\end{cases}$$

其中，$S(t)$代表居民储蓄，$Y(t)$代表国内生产总值，$F(t)$是外国资本流入，t代表时间。a,p,v,k,m,r都是正参数，分别代表边际储蓄的变化，资本利润率，产出利率或者资本利率，潜在 gross domestic product (GDP)，流入利率或者储蓄利率，偿债或者产出率。经济学上，为了保证经济偿还债务的能力，我们假设$\frac{a}{vr}>1$。D'Adda 等[2]处理了比这个条件更强的结果，他们假设$a>r,v\in(0,1)$。这两个条件同时具备的情形，见[1]。

Bouali [3]也从数学的观点提出下面关于公司利润的模型：

$$\begin{cases}\dot{R}=aP+pR\left(k-P^2\right)\\ \dot{P}=v\left(R+F\right)\\ \dot{F}=mR-rP\end{cases}$$

其中P代表公司利率，R代表再投资，F代表负债，系数代表相应的税率或者比率。

本文研究三维微分自治系统：

$$\begin{cases}\dot{x}=ay+px\left(k-y^2\right)\\ \dot{y}=v\left(x+z\right)\\ \dot{z}=mx-ry\end{cases}\tag{1}$$

其中，x,y,z为实变量，a,p,v,m为实参量。

2. 稳定性以及 Hopf 分支

定理 1：系统(1)的平凡平衡点$O(0,0,0)$为不稳定点；当$a>r$时，不平凡平衡点$M_{1,2}$为系统(1)的稳定点。

证明：注意到，系统(1)是反对称的系统。利用[4]的方法，首先求解系统：

$$\begin{cases}0=ay+px\left(k-y^2\right)\\ 0=v\left(x+z\right)\\ 0=mx-ry\end{cases}$$

通过计算，得到系统(1)的三个平衡点：

$$\begin{cases} O=(0,0,0) \\ M_1=\left(-\sqrt{\dfrac{amr+pkr^2}{pm^2}},\sqrt{\dfrac{amr+pkr^2}{pm^2}},\sqrt{\dfrac{amr+pkr}{pr}}\right) \\ M_2=\left(\sqrt{\dfrac{amr+pkr^2}{pm^2}},-\sqrt{\dfrac{amr+pkr^2}{pm^2}},\sqrt{\dfrac{amr+pkr}{pr}}\right) \end{cases}.$$

下面分别讨论这些平衡点。计算 Jacobian 矩阵：

$$\begin{bmatrix} p\left(k-y^2\right) & a-2pxy & 0 \\ v & 0 & v \\ m & -r & 0 \end{bmatrix}$$

我们通过下面特征多项式来判断平衡点的稳定性

$$p(\lambda)=\lambda^3+p\left(y^2-k\right)\lambda^2+v(r-a+2pxy)\lambda+v\left(pry^2+2mpxy-prk-am\right). \quad (2)$$

1、关于平衡点 $O(0,0,0)$：特征多项式的系数分别为

$$-pk<0, v(a-r), -v(rpk+am)<0$$

根据 Hurwitz 判据，若 $a \ge r$，特征多项式有一个正根；若 $a<r$，特征多项式有三个或者一个正根。总之，平凡平衡点 $O(0,0,0)$ 有至少一个正根，因此它不可能稳定。

2、关于平衡点 M_1 和 M_2：特征多项式的系数分别为

$$\frac{am}{r}>0, v\left(r+a+\frac{2rpk}{m}\right)>0, 2v(rpk+am)>0$$

得到 Hurwitz 行列式为

$$\begin{vmatrix} \dfrac{am}{r} & 1 & 0 \\ 2v(rpk+am) & v\left(r+a+\dfrac{2rpk}{m}\right) & \dfrac{am}{r} \\ 0 & 0 & 2v(rpk+am) \end{vmatrix}$$

要使得特征多项式是 Hurwitz 的，则要求所有的主子式为正，即

$$\begin{cases} \dfrac{am}{r}>0 \\ (a-r)\left(\dfrac{amv}{r}+2vpk\right)>0 \\ 2v(rpk+am)(a-r)\left(\dfrac{amv}{r}+2vpk\right)>0 \end{cases}$$

由此得：当 $a>r$ 时，平衡点 M_1 和 M_2 是稳定的。

注：由于特征多项式没有正实根，所以平衡点 M_1 和 M_2 的稳定性不会在特征值实轴平面改变，除非特征值穿过虚轴。

下面讨论特征值穿过虚轴，这时将产生 Hopf 分支。

定理 2：系统(1)产生的 Hopf 分支会在平衡点 $M_{1,2}$ 附近的临界值 $a=r$ 处产生极限环，当参数 a 穿过临界值 $a=r$ 后不平凡平衡点 $M_{1,2}$ 不再为系统(1)的稳定点。

证明：为了寻找 Hopf 分支，我们构造特征多项式的两个纯复特征值 $\pm iw$ 和一个实特征值 λ_3，带入(2)得

$$\left(\lambda-iw\right)\left(\lambda-iw\right)\left(\lambda-\lambda_3\right)=\lambda^3-\lambda^2\lambda_3+\lambda w^2-w^2\lambda_3 .$$

产生 Hopf 分支的必要条件为：

$$\frac{am}{r}v\left(r+a+\frac{2rpk}{m}\right)-2v\left(rpk+am\right)=0 .$$

我们联立求解

$$\begin{cases}\dot{x}=ay+px\left(k-y^2\right)\\ \dot{y}=v\left(x+z\right)\\ \dot{z}=mx-ry\\ p\left(\lambda\right)=\lambda^3+p\left(y^2-k\right)\lambda^2+v\left(r-a+2pxy\right)\lambda\\ \qquad\qquad +v\left(pry^2+2mpxy-prk-am\right)\\ v\left(r+a+\dfrac{2rpk}{m}\right)=w^2\end{cases},$$

其中， x,y,z 为变量， a,m 为参数。

1、对于平凡平衡点 $O\left(0,0,0\right)$，有

$$m=-pk$$

由于 $m,p,k>0$，所以这是不可能的。

2、对于平衡点 M_1 和 M_2，有

$$M_{1,2}=\left(\pm\frac{r}{m}\sqrt{\frac{m+pk}{p}},\pm\sqrt{\frac{m+pk}{p}},\mp\frac{r}{m}\sqrt{\frac{m+pk}{p}}\right)$$

其中参数 $a=r$， $m=\dfrac{2vpk}{w^2-2vr}$ 。可得

$$w=\sqrt{\frac{2vr\left(pk+m\right)}{m}}$$

可计算得

$$\lambda_3=-m<0$$

运用隐函数定理，关于平衡点 M_1，可计算

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}a}=-\frac{\dfrac{\mathrm{d}p\left(\lambda\right)}{\mathrm{d}a}}{\dfrac{\mathrm{d}p\left(\lambda\right)}{\mathrm{d}\lambda}}=-\frac{\lambda^2\dfrac{m}{r}+\lambda v+2vm}{3\lambda^2+2\lambda\dfrac{am}{r}+v\left(r+a\right)+\dfrac{2vrpk}{m}} .$$

将 $\lambda_{1,2}=\pm iw$ 和 $a=r$ 代入上式，得

$$Re\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}a}\bigg|_{a=r}=-\frac{\left(2mv-\frac{mw^2}{r}\right)\left(-3w^2+2vr+\frac{2vrpk}{m}\right)+2vw^2m}{\left(-3w^2+2vr+\frac{2vrpk}{m}\right)+4w^2m^2},$$

再将 $w=\sqrt{\frac{2vr(pk+m)}{m}}$ 代入上式，得

$$sgn\ Re\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}a}\bigg|_{a=r}<0.$$

这样，我们得到满足 Hopf 分支的横截条件，由[5]得：

这样的 Hopf 分支会在平衡点 $M_{1,2}$ 附近的临界值 $a=r$ 处产生极限环。由于 $a>r$ 时，特征多项式才是 Hurwitz 的，所以当参数 a 增长不超过临界值 r 时， $M_{1,2}$ 不会改变它的不稳定性。

3. 经济规律

通过对三维微分自治系统(1)的研究，分析其稳定性及 Hopf 分支，刻画了宏观经济学的经济循环。从经济学的观点， $\frac{a}{vr}>1$ 不能保证存在稳定的平衡点。根据定理 1，若债务或者产出比率小于边际储蓄变化率(即 $r<a$)，则经济均衡点局部稳定，但经济变化靠近稳定点过程中可能非局部不稳定地变化。对于外资投资而言，系统(1)中外国融资被简化了，所以我们的结论只适合于描述实体经济，另外，这个模型是线性的，经济学中线性模型多用于描述“市场中看不见的手”，用于调节经济的稳定和预测市场均衡。对于公司利润而言，系统(1)描述了公司利润的周期性动态。静态的财务管理系统可能失效，我们通过动态分析，根据定理 2，说明公司债券政策和股息分配方针同时要求最好可能导致利润的不可预测以及风险，还说明经济变化最后稳定于债务或者产出比率等于边际储蓄变化率时(即 $r=a$)，会在这个临界值处产生的极限环，当债务或者产出比率大于边际储蓄变化率时(即 $r>a$)，经济的稳定性本质上不会发生变化。另外，公司损失的上升是由借贷政策内部产生的，而不是由经济衰退的冲击产生的。

参考文献 (References)

[1] Vŏsvrda, M. (2001) Bifurcation Routes and Economic Stability. *Bulletin of the Czech Econometric Society*, **14**, 43-60.

[2] D’Adda, C. and Scorcu, A.E. (2003) On the Time Stability of the Output-Capital Ratio. *Economic Modelling*, **20**, 1175-1189. https://doi.org/10.1016/S0264-9993(02)00081-0

[3] Bouali, S. (2002) The Hunt Hypothesis and the Dividend Policy of the Firm. The Chaotic Motion of the Profits. *Computing in Economics & Finance*.

[4] 张芷芬. 微分方程定性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1985.

[5] Kuznetsov, Y.A. (2004) Elements of Applied Bifurcation Theory. *Applied Mathematical Sciences*, **288**, 715-730. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3978-7